INDEX

فهرست

1، تعادل نقطه مادی

2، تعادل اجسام صلب

3، خرپا

4، قاب

5، مرکز سطح

6، رسم نمودار (گشتاور خمشی و نیروی برشی)

7، اصطکاک

8، ممان اینرسی

9، کار مجازی ← حل مسئله تعادل (بدانیم چیزی را از دست نداده ایم)

PAPCO

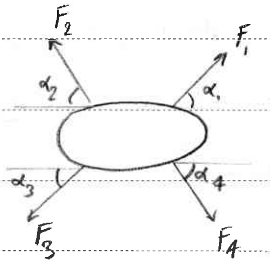
09019916762

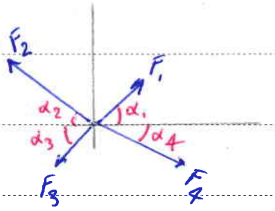
جلسه اول

* در تمام مراحل در درس استاتیک معادلات زیر استفاده می‌شود.

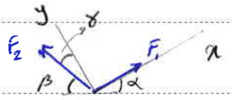
$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_y = 0$$
$$\Sigma M_x = 0$$

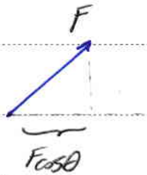
در این درس برای نوشتن ΣF_x و ΣF_y، ما 2 محور عمود بر هم (x و y) را کشیده و نیروها را روی این محور تصویر می‌کنیم.


F_2
F_1
α_2
α_1
α_3
α_4
F_3
F_4


F_2
F_1
α_2
α_1
α_3
α_4
F_3
F_4

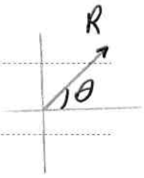
در بعضی از اوقات مجبوریم 2 محور عمود بر هم را، یکی از محورهایش را روی یک نیرو بیاندازیم تا روند محاسبات آسان‌تر شود.


y
γ
F_2
F_1
x
β
α


F
$F\cos\theta$

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x &= F_1\cos\alpha_1 - F_2\cos\alpha_2 - F_3\cos\alpha_3 + F_4\cos\alpha_4\\ \Sigma F_y &= F_1\sin\alpha_1 + F_2\sin\alpha_2 - F_3\sin\alpha_3 - F_4\sin\alpha_4\end{aligned}\right\} \text{if } \begin{matrix}\Sigma F_x = 0\\ \Sigma F_y = 0\end{matrix} \longrightarrow$$ تعادل برقرار است

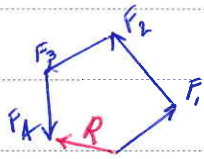
$$\text{if } \begin{matrix}\Sigma F_x \neq 0\\ \Sigma F_y \neq 0\end{matrix} \longrightarrow$$ دیگر استاتیک نیست $$\longrightarrow R = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2}\ ,\ tg\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$



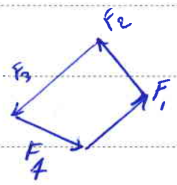
روش ترسیمی:

ابتدا از یک نیرو (ترجیحاً معلوم از لحاظ مقدار) موازی اش را می‌کشیم، پس نیروی دوم را از انتهای نیروی اول و موازی خودش می‌کشیم و پس بعدی، همینطور ادامه می‌دهیم، اگر انتهای نیروی آخر به نیروی اول رسید پس جسم در تعادل است در غیر این صورت، از ابتدای نیروی اول به انتهای نیروی آخر رسم می‌کنیم، اسم این نیرو (R) برآیند تمام نیروها است.

توصیه: اگر در مسائل 3 نیرو داشتیم و یکی از نیروها بر دیگری عمود بود، روش ترسیمی بهترین راه است.



$$\xrightarrow{if}$$



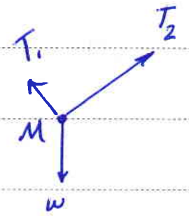
جسم در تعادل نیست، برآیندش هم R است.

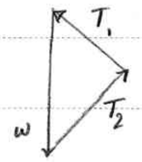
جسم در تعادل است.

$$\begin{cases}\Sigma F_x = 0\\ \Sigma F_y = 0\end{cases}$$

09019916762

EX شکل تعادل نقطه M را بکشید.

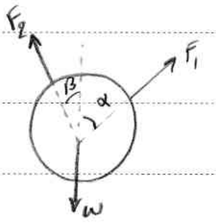


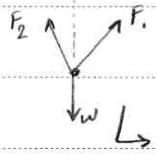


ابتدا w را رسم می‌کنیم، پس T_2 را موازی خودش و به اندازه خودش و سپس از انتهای T_2، T_1 را رسم می‌کنیم چون M در تعادل است پس انتهای T_1 به ابتدای w می‌رسد.

** اگر به یک جسم 3 نیرو وارد شود، که از این 3 نیرو، 2 نیرو مجهول ولی در جهت و زوایای معلوم و نیروی سوم معلوم باشد، ما می‌توانیم 2 نیروی مجهول را بدست آوریم دو روش برای این کار است، 1 ← کلاسیک

2 ← استاد





کلاسیک → $\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

* ولی ما از راه حل استاد می‌رویم.

F_1 را می‌خواهیم: sin زاویه بین F_2 و w (چه خود w و چه امتدادش فرقی ندارد، چون $\sin(180-\alpha)=\sin\alpha$) بدست می‌آوریم و در صورت قرار می‌دهیم. در مخرج کسر sin زاویه بین نیروهای F_1 و F_2 را بدست می‌آوریم. کل کسر را در نیروی معلوم یعنی w ضرب می‌کنیم، به این ترتیب F_1 بدست می‌آید. برای F_2 نیز همین کار را تکرار می‌کنیم.

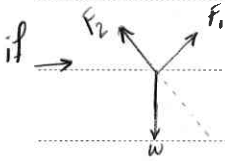
$$F_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \times \overset{\text{نیروی معلوم}}{\overset{\uparrow}{w}} \quad , \quad F_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \times w$$

حال برای اینکه ببینیم F_1 کششی است یا فشاری (جهت تعیین علامت F_1)

F_1 را می‌خواهیم: F_2 را امتداد می‌دهیم، اگر نیروی F_1 و w در دو طرف خط کشیده شده باشند ← کششی

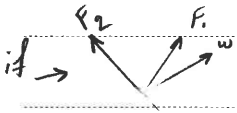
اگر یکطرف خط باشند F_2 فشاری است.

if →



→ F_1 و w در دو طرف خط → F_1 کششی

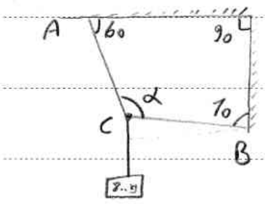
if →



→ w, F_1 در یکطرف خط → F_1 فشاری

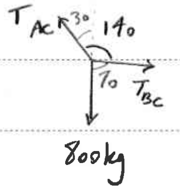
09019916762

EX $T_{AC}=?$


A
60
90
α
70
C
B
800

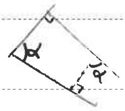
چون دارای 4 ضلعی ← 360 $\alpha = 360-90-60-70=140$

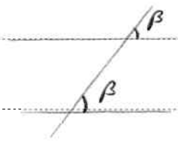
$\alpha = 140°$


T_{AC}
30
140
70
T_{BC}
800kg

$$T_{AC} = \frac{\sin 70}{\sin 140}\ 800$$

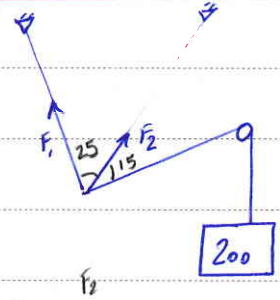
Note →





Note ← اگر در سوالی 3 مجهول بود، به سوال بعدی بروید، یا سوال غلط است یا ما چیزی را بدست نیاورده ایم.

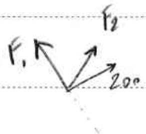
Note ← در سوالات چنین رو ما به اصطکاک کاری نداریم (عملاً در سوالات اصطکاک صفر است) تا برسیم به فصل اصطکاک


F_1
25
15
F_2
200

EX F_1 و $F_2 = ?$

حل) تجزیه اصلاً نمی کنیم، چون زاویه جا افق را نداریم.

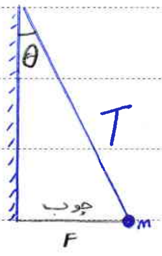
در تمام تعادل کابل $T=200kg$ است.



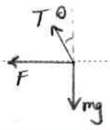
$$F_1 = \frac{\sin 15}{\sin(40)} \times 200 \quad \text{و} \quad F_2 = \frac{\sin 25}{\sin(40)} \times 200$$

کششی ↑ فشاری ↑

EX نیروی چوب چقدر است؟

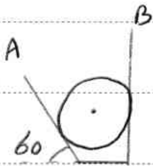


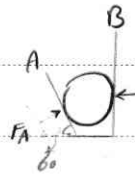
حل، در کنکور روی همان شکل سوال تجزیه کنیم، بهتر است.

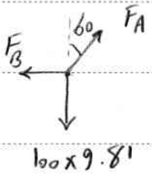


$$F = \frac{\sin\theta}{\sin(90-\theta)}\ mg \qquad T = \frac{\sin 90}{\sin(90-\theta)}\ mg$$

EX کره ای به جرم 100kg است، نیروی عکس العمل دیوار چقدر است؟ (اصطکاک = 0)





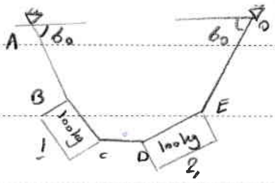

F_B
60
F_A
100×9.81

$$F_B = \frac{\sin 60}{\sin(90+60)} \times 100\times 9.81$$

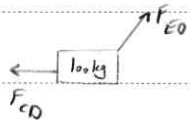
$$F_A = \frac{\sin 90}{\sin(90+60)} \times 100 \times 9.81$$

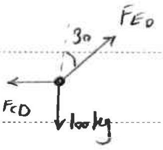
09019916762

EX وزن بلوک ۱ و 2 هرکدام 100kg است، $F_{CD} = ?$



حل: پیکر آزاد، یا دیاگرام آزاد بلوک 2 را رسم می‌کنیم، پیکر آزاد مقطع نیرو می‌شناسد.





$$F_{CD} = \frac{\sin 30}{\sin(120)} \times 100$$

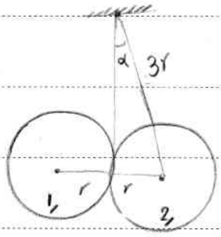
از روش ترسیمی نیز می‌توان بدست آورد.

2 مجهول، جهت و زوایا معلوم ← قابل حل است.

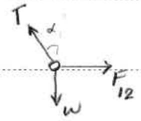
note ← درست است واحد وزن N است ولی در قدیم یک سیستمی به نام mks بوده است که وزن kg جرم $\frac{kg}{9.81}$

ولی امروزه سیستم SI در تمام کشورها استفاده می‌شود. وزن N جرم kg

EX 2 گوی یکسان با وزن w، نیرویی که به هم وارد می‌کنند چقدر است.

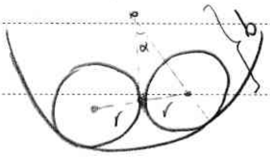


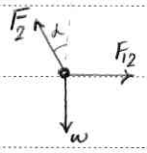
$$\sin\alpha = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$



$$F_{12} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90+\alpha)} w$$

EX 2 کره یکسان به شعاع r داخل کاسه کروی به شعاع b بدون اصطکاک قرار گرفته‌اند. (b = 3r)
نسبت نیروی عکس‌العمل بین کره و کاسه F_{12} چقدر است. (صاف or صیقل ← اصطکاک ندارد)



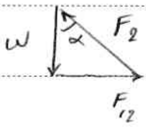


$$\sin\alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \longrightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$F_2 = \frac{\sin 90}{\sin(90+\alpha)} w$$

or

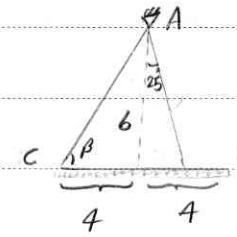
روش مثلثی، چون یکی برآیند عمود است، روش ترسیمی بهتر است:

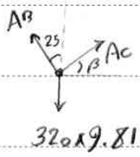


$$\cos\alpha = \frac{w}{F_2} \longrightarrow F_2 = \frac{w}{\cos\alpha}$$

09019916762

EX. جرم میله 320kg است، نیروی داخل کابل AB چقدر است؟



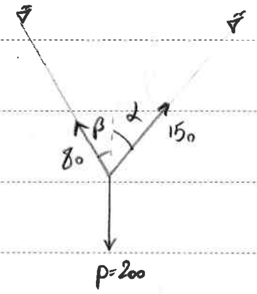

AB
25
β
Ac
320×9.81

$$F_{AB} = \frac{\overbrace{\sin(90-\beta)}^{\cos\beta}}{\underbrace{\sin(90-\beta+25)}_{\cos(25-\beta)}} \times 320 \times 9.81$$

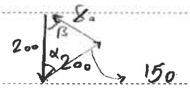
$$tg\beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\cos\beta = \frac{4}{\sqrt{6^2+4^2}} \text{ و } \sin\beta = \frac{6}{\sqrt{6^2+4^2}}$$

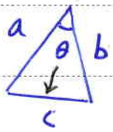
EX. ** α و β چقدر می‌شود؟


β
α
80
150
p=200

Note ← اگر نیروها معلوم بود و زاویه مجهول ← از روش ترسیمی استفاده شود.

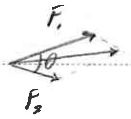

80
β
200
α
200
150

$$80^2 = 150^2 + 200^2 - 2\times150\times200\cos\alpha$$



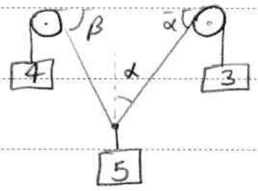
$$\rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

یادآوری



$$R = (F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta)^{1/2}$$

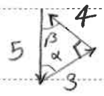
EX. ؟ = (α و β)



حل)

نیروها معلوم و زوایا مجهول ← از روش ترسیمی می‌رویم

اگر خواسته شود، زوایا 3،4،5 ← مثلث قائم الزاویه است



$$\cos\beta = \frac{4}{5} \text{ ، } \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

Note ← عموماً سوالات از کتب قدیمی است (After break)

5 هیبلر چاپ
امتحانات } تعادل

shames
1958

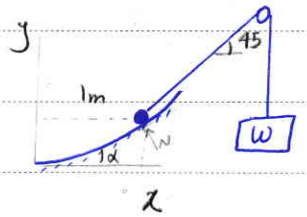
مریام
ترجمه رضا بدیعی

جانسون
کم آمده

HoGR

09019916762

EX



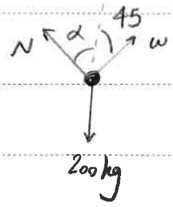
$y = \frac{1}{2\sqrt{3}} x^2$ معادله سطح

200kg وزن لوله

$w = ?$

$\tan\alpha = y' = \frac{1}{\sqrt{3}} x \overset{@x=1}{\Longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow \alpha\ 30$

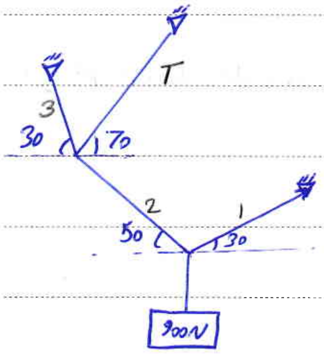
پیکر آزاد لوله →

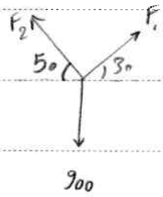

45
N
α
w
200kg

$w = \frac{\sin\alpha}{\sin(45+\alpha)} 200 \Rightarrow w = \frac{\frac{1}{2}}{\sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30} \times 200$

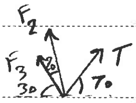
$W = \frac{2 \times 200}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$

$T = ?$ EX


T
3
30
70
2
1
50
30
900N

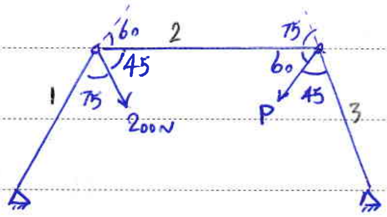

F2
F1
50
30
900

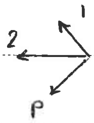
$F_2 = \frac{\sin 60}{\sin 100} \times 900$

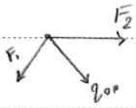


$T = \frac{\sin 20}{\sin 80} \times F_2$

$p = ?$ (Singer) EX


60
2
75
45
1
75
200N
60
45
P
3





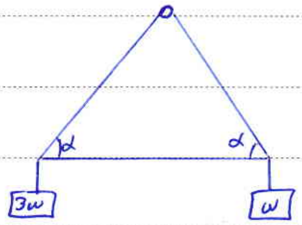
$F_2 = \frac{\sin 75}{\sin 120} \times 200 \quad , \quad p = \frac{\sin 75}{\sin 135} \times F_2 \rightarrow$

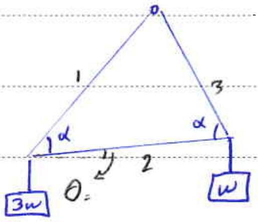
$p = \frac{\sin 75}{\sin 135} \times \frac{\sin 75}{\sin 120} \times 200 \longrightarrow P = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 200 =$

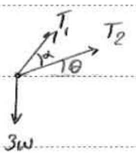
$\frac{6+2+2\sqrt{12}}{\sqrt{6}} \times 200$

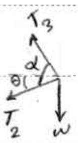
09019916762

$\theta = ?$. EX









$$T_2 = \frac{\sin(90-(\alpha+\theta))}{\sin\alpha} 3w \Rightarrow T_2 = \frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} 3w$$

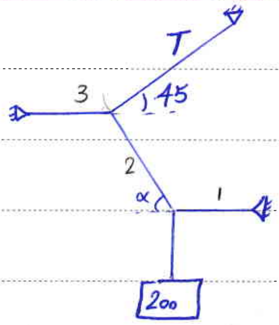
÷

$$T_2 = \frac{\sin(90-\theta+\alpha)}{\sin\alpha} w \Rightarrow T_2 = \frac{\cos(\alpha-\theta)}{\sin w} w$$

$$1 = \frac{\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta}{\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta} 3 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\cos\theta - tg\alpha\sin\theta}{\cos\theta + tg\alpha\sin\theta} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1 - tg\alpha\, tg\theta}{1 + tg\alpha\, tg\theta} \Rightarrow$$

$$3 - 3tg\alpha\, tg\theta = 1 + tg\alpha\, Tg\theta \Rightarrow 4tg\alpha\, tg\theta = 2 \Rightarrow tg\alpha\, tg\theta = \frac{1}{2}$$

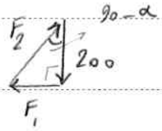
$T = ?$ shames . EX **



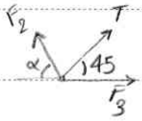
حل)

ما مقدار α را نداریم و نمی توان حل کرد. این سوال از shames است و بعید است که غلط باشد، این سوال با کلید پاسخ قابل حل است و اگر زاویه را α بدهیم، شاید در آخر ساده شود، پس در کلکولر حل می کنیم.

روش ترسیمی



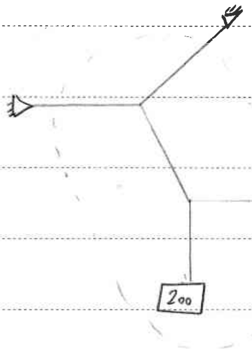
$$\cos(90-\alpha) = \frac{200}{F_2} \longrightarrow F_2 = \frac{200}{\sin\alpha}$$



$$T = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(45)} F_2 \longrightarrow T = \frac{\sin\alpha}{\sin 45} \times \frac{200}{\sin\alpha} = \frac{200}{\sin 45} = \frac{400}{\sqrt{2}} = 200\sqrt{}$$

NoTC اگر در سیستمی بسته n تا نیرو وارد شود، از این n تا نیرو n-1 نیرو با هم موازی باشد، نیروی nام قابل محاسبه است.

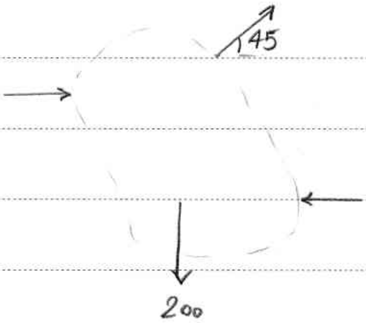
09019916762



حل با استفاده از نکته قبل.

کل جسم را یک پیکر درنظر میگیریم.

(۱) توجه شود در هنگام نوشتن معادله‌ها $\begin{cases}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{cases}$ وزن را فراموش نکنیم۰۰)

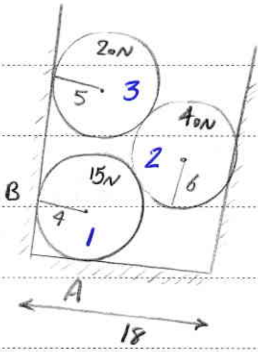


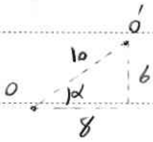
$$\Sigma F_y=0 \Rightarrow 200 = T\sin45 \rightarrow T=\frac{200}{\sin45}$$

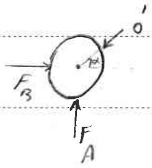
EX★ ۳ تا کره در داخل استوانه قرار گرفته‌اند. $F_B=?$

حل) پیکر جسم ۱ را رسم می‌کنیم،

۳ نیروی مجهول ← حل نمی‌شود.


20N
3
5
40N
2
6
15N
1
4
B
A
18



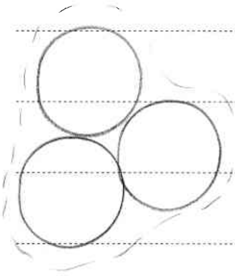


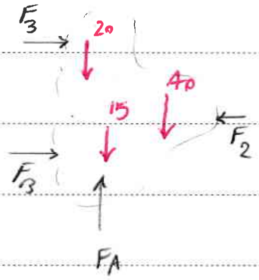
$tg\alpha=\frac{3}{4}$

اگر پیکر جسم ۲ را هم رسم کنیم ← ۳ مجهول حل نمی‌شود

اگر پیکر جسم ۳ را رسم کنیم ← ۲ مجهول ← 0.5 کار دارد. تا F_B را بدست آوریم.

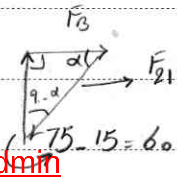
از نکته صفحه قبل استفاده می‌کنیم.




F_3
20
40
15
F_2
F_3
F_A

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow F_A=75$$

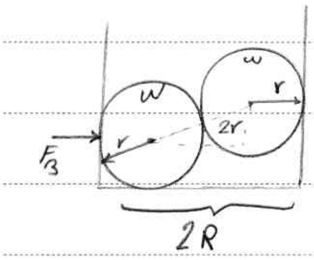
حال پیکره جسم ۱


F_B
α
90-α
F_{21}
75-15=60

$$tg\alpha=\frac{60}{F_B} \rightarrow F_B=\frac{60}{\frac{3}{4}}=\frac{4\times60}{3}=80N$$

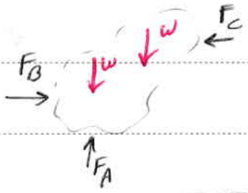
09019916762
PAPCO

EX. shames $F_B=?$

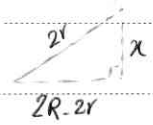

w
w
r
r
2r
F_B
2R

حل

مثل مثال صفحه قبل کل جسم را پیکره درنظر میگیریم.



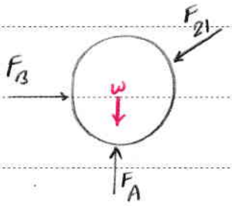
$\Sigma F_y=0 \Rightarrow F_A=2w$

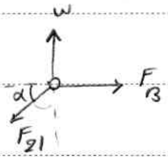


$\sin\alpha=\frac{2R-2r}{2r}$

$\longrightarrow x=\sqrt{r^2-R^2-r^2+2rR} \Rightarrow x=\sqrt[2x]{2rR-R^2}$

حال پیکر آزاد جسم ۱ را





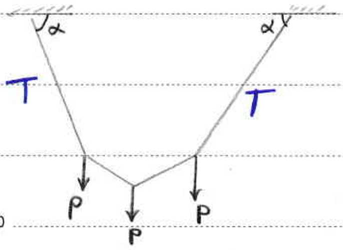
$F_B=\frac{\sin(90+\alpha)}{\sin(180-\alpha)}\,w \Rightarrow F_B=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,w$

$F_B=\frac{w}{tg\alpha}$ $\quad F_B=\frac{2(R-r)}{2\sqrt{2rR-R^2}}\,w \Rightarrow F_B=\frac{R-r}{\sqrt{2rR-R^2}}\,w$

Note ←

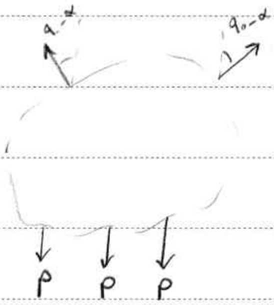
اگر در مثالی شکل تقارن داشت، از تقارن استفاده کنید.

EX. $T=?$



حل،

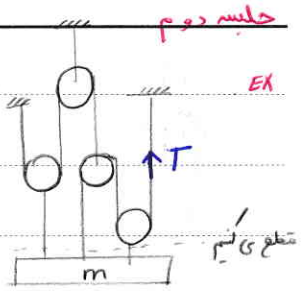
کل جسم را یک پیکره درنظر میگیریم. ←



$\Sigma F_y=0 \quad 3P=2T\sin\alpha \longrightarrow T=\frac{3P}{2\sin\alpha}$

09019916762

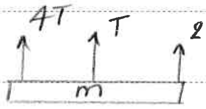
جلسه دوم


T
m
قطع می‌کنیم

EX

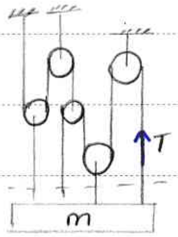
$m = ?$

حل) از جایی کابل را قطع می‌کنیم تا مطمئن شویم که جرم m می‌افتد. سپس نیرو را در هر قرقره و کابل به دست می‌آوریم.



$\Rightarrow \Sigma F_y = 0 \longrightarrow m = \frac{7T}{g}$

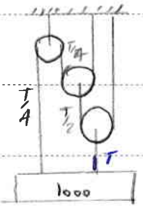
EX



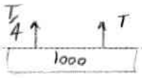
$4T + T + 2T + T = mg \longrightarrow T = \frac{mg}{8}$

EX

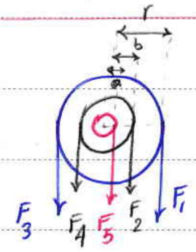
$T = ?$


T/4
T/4
T/2
T
1000

حل) در قرقره‌ها اصطکاک نداریم ← تا زمانی که اصطکاک نباشد تا جایی که کابل ادامه دارد همان T است.



$\frac{5T}{4} = 1000 \longrightarrow T = 800$

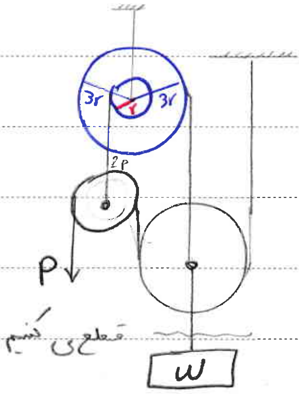

r
b
a
F_3
F_4
F_5
F_2
F_1

$F_1 r + F_2 b + F_5 a = F_4 a + F_3 r$

Note **

اگر چند قرقره در داخل هم بودند، مجموع گشتاورهای سمت چپ با راست باید برابر باشد.

EX (سوال کنکور نبوده)


3r
r
3r
2p
P
قطع می‌کنیم
W

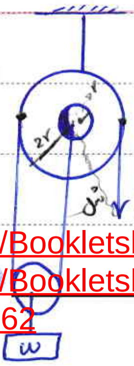
$W = ?$

حل) توجه شود که نیروی این دو قرقره کوچک با نیروی کابل قرقره بزرگتر کاملاً فرق می‌کند.

$2pr = F3r \longrightarrow F = \frac{2}{3}p$

$p + \frac{2}{3}p + p = w \longrightarrow p = \frac{3w}{8}$

EX F چقدر باشد تا جرم زیر در حالت تعادل باشد.


2r
r
F'
F
← هیچ تاثیر ندارد
w

حل) باید توجه شود که نیروی $F \neq \frac{w}{2}$، در واقع انگار در محل اتصال میخ کرده‌اند و کابل‌ها به هم دیگر ارتباطی ندارند.

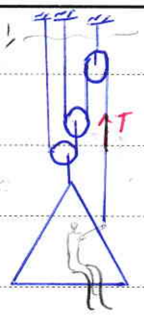
$\frac{w}{2} \times 2r = \frac{w}{2} \times r + F' \times 2r \Rightarrow w - \frac{w}{2} = 2F' \rightarrow F' = \frac{w}{4}$

09019916762

EX. شخص چه نیرویی را باید وارد کند تا در تعادل باشد؟

وزن شخص 800 kg

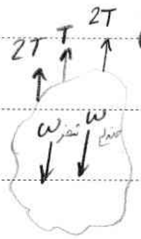
وزن صندلی w



ببریم شخص می‌افتد

حل) برای اینکه ببینیم که شخص چه نیرویی را به طناب وارد می‌کند، ابتدا باید نیروی T (کشش کابل) را به دست آوریم.

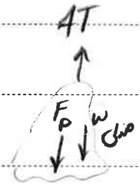
از جایی می‌بریم که sys بیافتد. (محل را) پیکره را آن sys در نظر می‌گیریم (همراه با شخص)



$$5T = w_{\text{شخص}} + w_{\text{صندلی}} \qquad 5T = 800 \longrightarrow T = 160$$

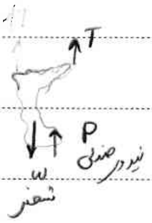
$w_{\text{صندلی}}$ حذف می‌کنیم

حل) برای اینکه ببینیم شخص چه نیرویی به صندلی وارد می‌کند که باید پیکره آزاد صندلی را رسم کنیم.



$$4T = F_p + w_{\text{صندلی}} \longrightarrow F_p = 4T$$

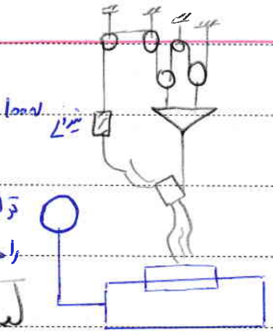
اگر پیکره آزاد شخص را رسم کنیم ←



$$T + P = w_{\text{شخص}}$$

$$P = w - T$$

EX وزن شخص چقدر است؟

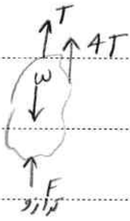


ترازو 400N را نشان می‌دهد.

که یعنی پای شخص نیروی 400N را وارد می‌کند

معلوم نیست که وزن شخص را نشان می‌دهد یا خیر

حل) برای حل باید پیکره آزاد شخص را رسم کرد



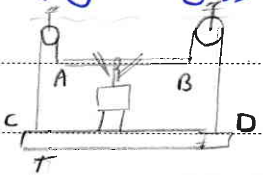
$$5T + F = w \longrightarrow w = 400 + 500 = 900$$

EX (هیلر چاپ 5) شخص AB را به سمت پایین می‌کشد تا نیافتد. نیروی شخص به CD چقدر است؟

وزن شخص 600N

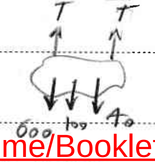
وزن میله AB = 100N

وزن میله CD = 40N



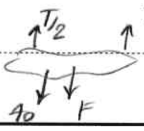
حل) ابتدا باید نیروی کشش کابل به دست آید.

از جایی می‌بریم که sys بیافتد.



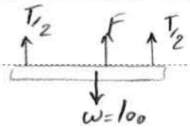
$$2T = 740 \longrightarrow T = 370N$$

حل) پیکره CD را رسم می‌کنیم.



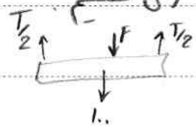
$$F + 40 = \frac{T}{2} \times 2 \longrightarrow F = T - 40 = 330N$$

09019916762



حال نیروی شخص به AB چقدر است؟

حل) بلوک آزاد AB را می‌کشیم



$F = 1000 - 370 = -270$ ⟶ یعنی نیروی F را برعکس کشیده‌ایم ولی مقدارش فرقی نمی‌کند ⟶

فصل 2, 3 مهم هستند و اکثر سوالات را در بر می‌گیرند.

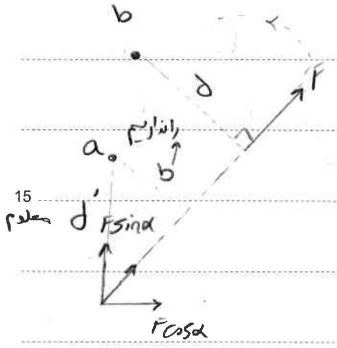
فصل 3

در این فصل ما از 3 معادله
$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$
بیشتر استفاده کرده و در سوالات اگر 3 مجهول داشته باشیم سوال قابل حل است، اگر بیشتر بود، قادر به حل آن نیستیم.

گشتاور:

از انتهای F به b نزدیک می‌شویم و دورش می‌چرخیم.

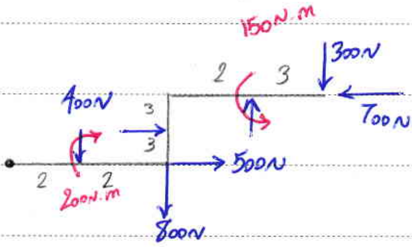
$M_b = Fd$


b
d
F
a
امتداد دادیم
b'
d'
معلوم
$F\sin\alpha$
$F\cos\alpha$

اگر در سوالی فاصله عمودی نیرو تا نقطه معلوم نبود می‌توانیم نیرو را امتداد دهیم و سپس نیرو را تصویر کنیم

Ex. معادل استاتیکی نیروها را در A نشان دهید. (آزاد)

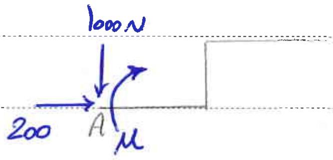
حل) تمام نیروها را به نقطه A می‌بریم (با حمل گشتاورشان)


150N.m
300N
2
3
700N
400N
3
3
500N
2
2
200N.m
800N

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = -700 + 400 + 500 = +200N$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = -300 + 200 - 800 - 100 = -1000N$$

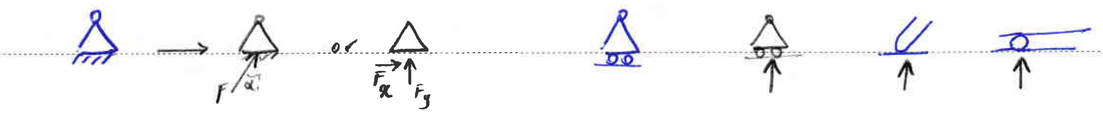
$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 300 \times 9 - 200 \times 6 - 150 + 200 + 400 \times 3 + 800 \times 4 + 100 \times 2 = M$$

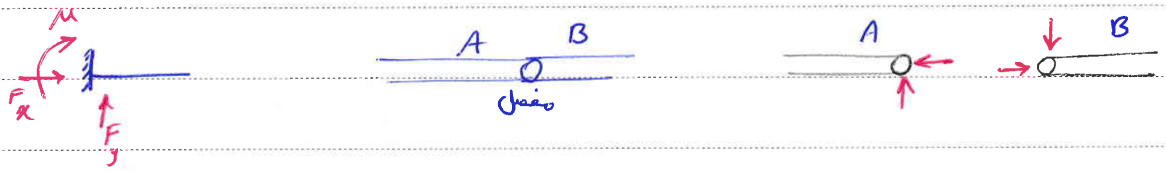

1000N
200
A
M

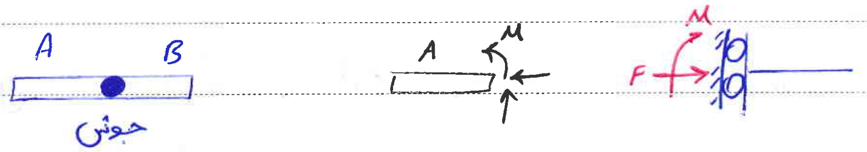
Note**: عضوی که فقط تحت تاثیر 3 نیرو واقع شده باشد، عضو 3 نیرویی نامیده می‌شود. در صورتی که عضو 3 نیرویی در حال تعادل باشد، سه نیرو باید متقارب (همرس) باشند. (همدیگر را قطع کنند)

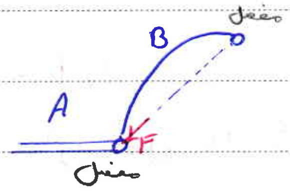
(نکته ص 71, 72 مهم)

09019916762

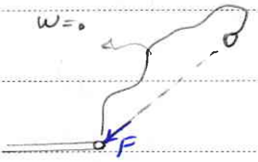



M
F_x
F_y
A
B
مفصل
A
B




مفصل
B
A
F
مفصل

Note ← اگر مفصل - مفصل بود و به قطعه نیروی وارد نشود و قطعه وزن نداشته باشد، خواستیم اثر B به A را بدست آوریم، مفصل به عضو 2 نیروی تبدیل شده و اثر قطعه B بر قطعه A در امتداد دو مفصل است که به همدیگر وصل شده اند.



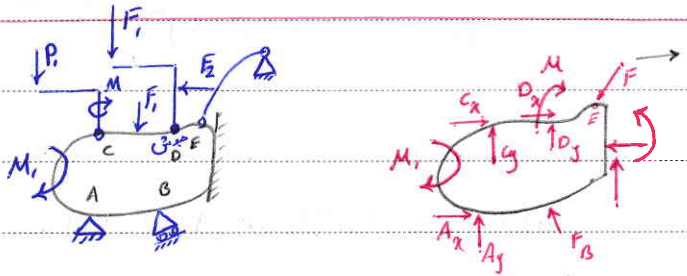
(2 نیرو به 1 نیرو تبدیل شده است)

مفصل - مفصل در حالت کلی 2 مجهول دارد، ولی چون شرایط گفته بالا را دارد (میله وزن ندارد و بهش نیروی اثر نمی کند) اثر B به A یعنی 2 نیرویی می شود.

(اثر A به B ↗ در جهت خلاف اثر B به A)

EX

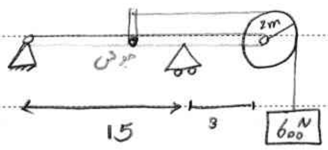
مفصل - مفصل
بدون وزن - بدون نیرو


F_1
P_1
M
F_2
F_1
C
جوش D
E
M_1
A
B
M
C_x
D_x
F
C_y
D_y
M_1
A_x
A_y
F_B

در مورد نقطه C (چون مفصل است) پس فقط نیروها را انتقال می دهیم، چون مفصل گشتاور تحمل نمی کند.

ولی اگر جوش بود، باید گشتاور هم بیاوریم. (تا می توانیم شکل ها را از هم جدا نکنیم ← وقت زیاد گرفته می شود.)

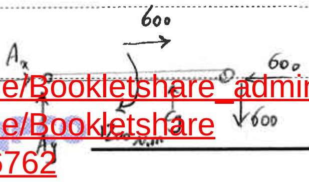
EX. (در کتاب نیست) نیروی عکس العمل در تکیه گاهها ؟
(در کنکور نیامده)


جوش
2m
15
3
600 N

حل) در کنکور این طور عمل می کنیم

قرقره مانند مفصل است. و نیروهای وارد بر قرقره را بر پولی انتقال می دهیم.

برای جدا کردن میله باید دقت کرد که زمانی که میله را می بریم باید بتوانیم میله را کاملاً از اتاق بیرون ببریم) در اینجا نیروی کابل نمی گذارد، یعنی باید کابل هم بریده شود ←

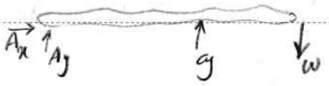

600
A_x
600
600

پیکر میله AB را رسم می کنیم (تکیه گاه ها را می شناسیم ... (

09019916762

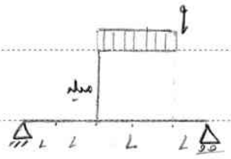
حل کلی: اگر قرقره به میله وصل باشد، آن را جدا نمی‌کنیم، همینطور میله جوشی داده شده را هم را یک پیکر در نظر می‌گیریم ← حال پیکر AB را رسم می‌کنیم.

درجای شلوغ تشاوری گیریم.

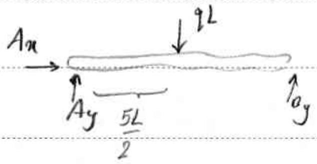


$\Sigma M_A=0 \to g\checkmark \to \Sigma F_y=0 \to A_y=\checkmark$, $\Sigma F_x=0 \to A_x\checkmark$

EX. عکس العمل تکیه‌گاه‌ها چقدر است؟



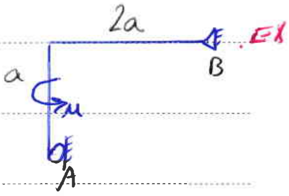
پیکر AB را رسم می‌کنیم ولی چون میله بهش چسبیده است آن را جدا نمی‌کنیم.

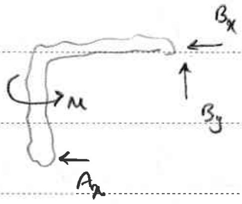


$\Sigma M_A=0 \to B_y\times 5L-qL\times\frac{5L}{2}=0 \Rightarrow B_y=\checkmark$

چون شکل متقارن $A_y=B_y$

EX. عکس العمل تکیه‌گاه‌ها؟





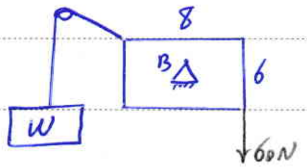
$(+\Sigma M_B=0 \Rightarrow A_x a-M=0 \to A_x=\frac{M}{a}$

$\Sigma F_y=0 \to B_y=0$

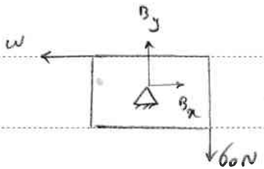
$\Sigma F_x=0 \to B_x=A_x$

After break

EX. $B_x=?$
$B_y=?$



حل) چون قرقره جدا است، پس جدا از پیکر جسم در نظر می‌گیریم.

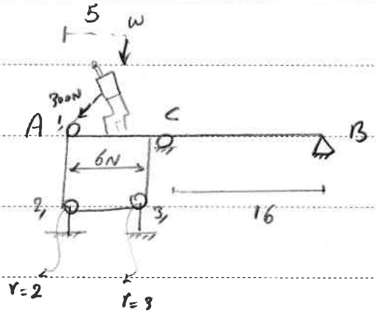


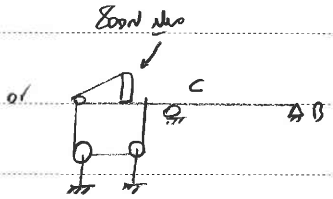
$\Sigma M_B=0 \to w\times 3-60\times 4=0 \to w=80N$, $\Sigma F_y=0 \to B_y=60$

$\Sigma F_x=0 \to B_x=80$

ممکن است از ما بپرسند B را بخواهند ← $B=\sqrt{B_x^2+B_y^2}$

09019916762


5
w
300N
A
C
B
6N
16
2
3
r=2
r=3


800N میله
o'
C
B

EX. عکس العمل در تکیه‌گاه‌ها

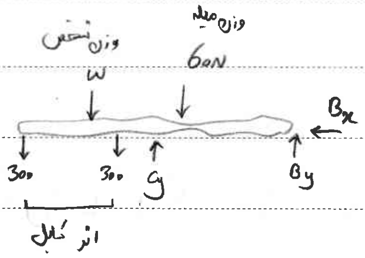
وزن شخص 800N

وزن میله AB = 60N

شخص با 300N کابل را می‌کشد.

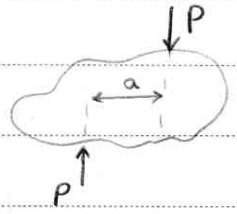
عکس العمل B,C چقدر است؟

حل) چون قرقره را و شخص روی میله هستند آنها را جزو پیکر میله در نظر گرفتیم ولی قرقره‌های 2,3 را جدا می‌کنیم و اثرشان را روی پیکر می‌گذاریم.

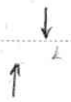

وزن شخص
W
وزن میله
60N
B_x
300
300
C_y
B_y
اثر کابل

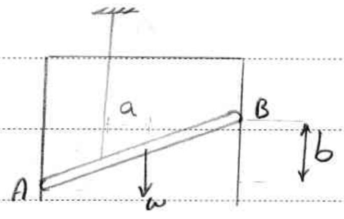
جایی که مجهول است گشتاور می‌گیریم.

$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow C_y ✓$, $\Sigma F_x = 0 \longrightarrow B_x ✓$, $\Sigma F_y = 0 \longrightarrow B_y ✓$



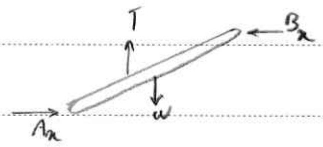
کوپل اگر 2 نیروی مساوی و موازی به فاصله a داشتیم، همواره حاصل گشتاور این 2 نیرو نسبت به هر نقطه دلخواه pa است و چنانچه از یک نیرو دور آن یکی نیرو بچرخیم، به دست می‌آید.





EX. عکس العمل دیواره A چقدر است.

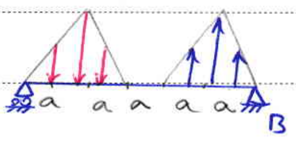
حل) ابتدا پیکر میله را رسم می‌کنیم.

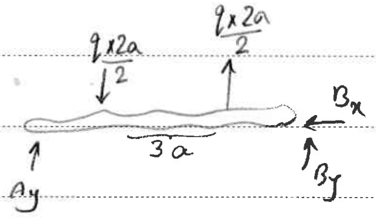


$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow T = w \longrightarrow$ 2 نیروی مساوی و موازی به فاصله a

$+\circlearrowleft\ \Sigma M_A = 0 \longrightarrow B_x \times b - wa = 0 \longrightarrow B_x = \frac{wa}{b}$, $\Sigma F_x = 0 \longrightarrow A_x = -B_x$

EX. عکس العمل در تکیه‌گاه




$\frac{q \times 2a}{2}$
$\frac{q \times 2a}{2}$
B_x
3a
A_y
B_y

$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow A_y \times 5a - qa \times 3a = 0 \longrightarrow A_y = \frac{2qa^2}{4a} = \frac{qa}{2}$

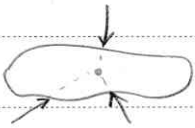
09019916762

Subject: ۱
Year. Month. Date. ( )

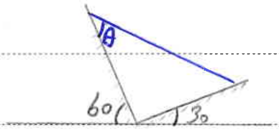
جلسه سوم

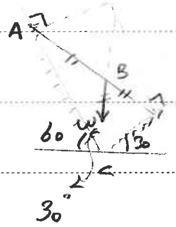
عضو سه نیرویی:

اگر به عضوی 3 نیرو وارد شود، برای اینکه جسم در حال تعادل باشد باید سه نیرو متقارب باشند یعنی امتداد ۳ نیرو از یک نقطه بگذرد وگرنه جسم در تعادل نمی باشد.



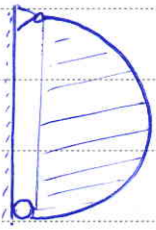
EX. $\theta = ?$ باشد تا جسم در تعادل باشد و از دیواره‌ها سر نخورد؟ (وزن میله w است) (اصطکاک $= 0$)

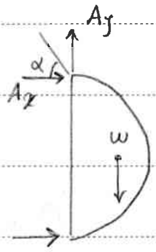




حل)
4 ضلعی که تمام زوایایش $90°$ است مستطیل
در مستطیل قطرها همدیگر را نصف می کنند
پس مثلث $\hat{ABC}$ متساوی الساقین می شود پس
زاویه θ هم $30°$ می شود.

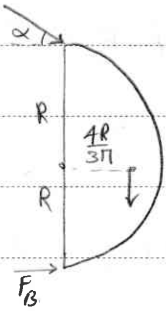
EX. نیروی عکس العمل تکیه گاه A با افق چه زاویه ای می سازد؟



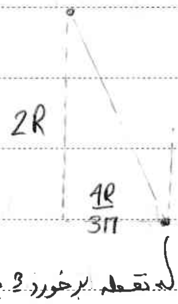


حل) یک راه این است که از $\Sigma M_A =$ ← B بدست آید.
پس ΣF_x و ΣF_y بدست بیاوریم ← $tg\alpha = \frac{A_y}{A_x}$
α را بدست آوریم.

ولی در اینجا از عضو سه نیرویی حل می کنیم.



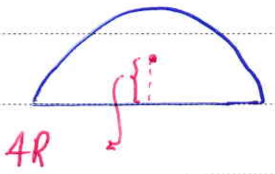
α
R
R
$\frac{4R}{3\pi}$
F_B



2R
$\frac{4R}{3\pi}$
نقطه برخورد 3 نیرو

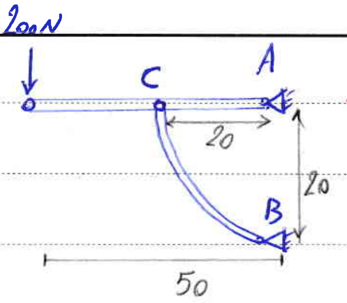
$$tg\,\alpha = \frac{\frac{4R}{3\pi}}{2R} = \frac{3\pi}{2}$$

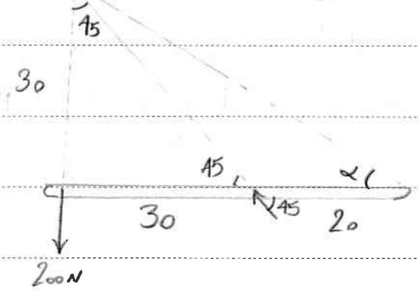
note ← فاصله مرکز سطح نیم دایره



09019916762

EX. عکس العمل A با افق چه زاویه‌ای می‌سازد؟


200N
C
A
20
20
B
50


45
30
45
α
30
45
20
200N

BC ← مفصل-مفصل ← 2 نیرویی

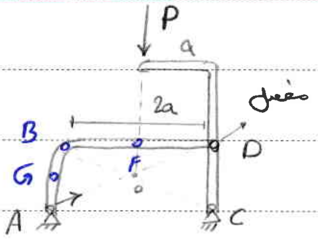
از طرفی چون ربع دایره هم هست ← زاویه

C با افق 45°.

پس باید امتداد نیروی A از محل برخورد 2 نیروی 200N و C بگذرد.

$tg\alpha = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

EX. برآیند نقطه C از کدام نقطه می‌گذرد؟


P
a
2a
مفصل
B
G
F
D
A
C

ابتدا کل جسم را یک پیکره در نظر می‌گیریم.

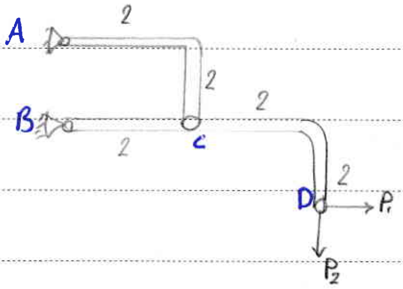
حل) AC ← مفصل-مفصل ← دونیرویی

نیروی A و P همدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند.

طبق قضیه تالس، نقطه O وسط میله BD است.

حال امتداد نیروی C نیز باید از نقطه O عبور کند ← نیروی C از نقطه B عبور کند.

EX. برآیند نیروی B از نقطه D می‌گذرد:

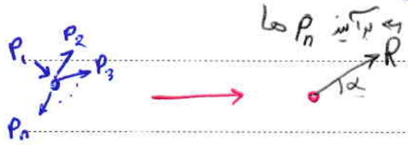

A
2
2
2
B
2
C
2
D
P_1
P_2

1) اگر $P_1 > P_2$ 3) همواره می‌گذرد.

2) اگر $P_2 > P_1$ 4) اصلاً نمی‌گذرد.

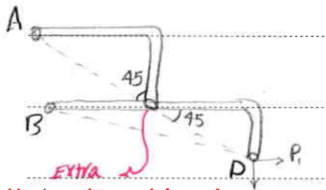
حل)

Note وقتی به یک نقطه مادی P_n نیرو وارد شود در واقع یک نیرو وارد شده است.


P_1
P_2
P_3
P_n
برآیند P_n ها
R
α

پس در مثال بالا در نقطه D یک نیروی P وارد می‌شود.

اگر کل جسم را در نظر بگیریم ← 3 نیرو وارد می‌شود ← عضو 3 نیرویی است.


A
45
B
45
EXTRA
D
P_1

AC ← مفصل-مفصل ← دونیرویی و نیرو در امتداد 2 مفصل.

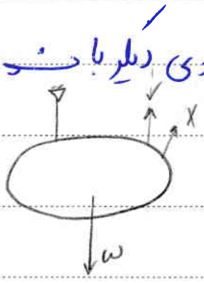
$tg\alpha = \frac{2}{2} = 1$ ← زاویه 45°، چون ① در میله CD نیز $tg\alpha = \frac{2}{2} = 1$ پس

امتداد نیروی A از D می‌گذرد، P هم که به نقطه D اثر می‌کند، پس باید برآیند

نقطه B هم همواره از D بگذرد تا جسم در تعادل باشد.

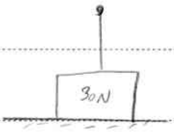
09019916762

Note ← اگر 2 نیرو موازی باشد، باید نیروی سوم حتماً موازی 2 نیروی دیگر باشد تا جسم در تعادل باشد (همدیگر را در ∞ قطع کنند)



"آستانه جدایش"

سوالات مربوط به این مبحث:



نیروی F چقدر باشد تا جسم در آستانه بلند شدن قرار بگیرد.

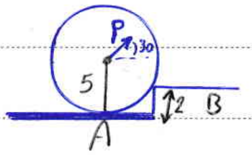
حداکثر نیروی F چقدر باشد تا جسم از روی زمین بلند شود.

در این جور مسائل باید نیروی بین جسم و زمین را حذف کرد.

چون اگر $\Sigma F_y=0$ قرار دهیم، هیچ نیروی دیگر از زمین به جسم وارد نمی شود.

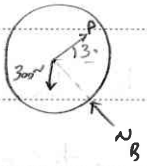
EX. P چقدر باشد تا استوانه از زمین بلند شود. (وزن استوانه 300N)

or حداکثر نیروی P چقدر باشد تا جسم از زمین بلند شود.



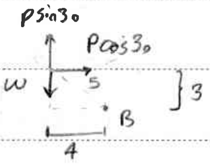
حل: اگر استوانه در آستانه جدایش قرار بگیرد $N_A=0$ می شود.

بیکر جسم را رسم می کنیم (چون اصطکاک نداریم، N در راستای شعاع استوانه است؟)



در اینجا نسبت به نقطه B گشتاور می گیریم

$\Sigma M_B=0 \longrightarrow$

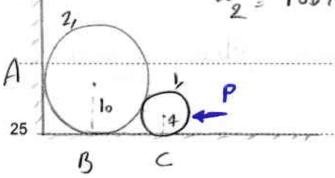


$\Sigma M_B=0 \longrightarrow P\sin30\times4+P\cos30\times3-300\times4=0 \longrightarrow P=✓$

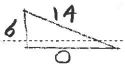
EX. حداکثر نیروی P چقدر باشد تا جسم 1 از زمین بلند شود.

or " " در آستانه بلند شدن قرار بگیرد.

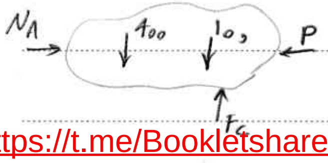
$\omega_1=100N$
$w_2=400N$



حل: اگر جسم 2 در آستانه بلند شدن قرار بگیرد، $F_B=0$ می شود.

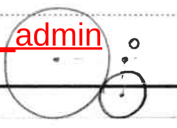


$O=\sqrt{14^2-6^2}=12.64$



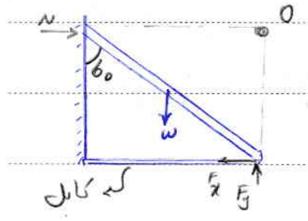
$\longrightarrow \Sigma F_y=0 \longrightarrow F_C=500N,$

2 نیروی مجهول F_C و F_A را ادامه داده و نسبت به آن نقطه گشتاور می گیریم



$\overset{+}{\circlearrowleft}\Sigma M_O=0 \longrightarrow P\times6=400\times12.64 \longrightarrow P✓$

09019916762

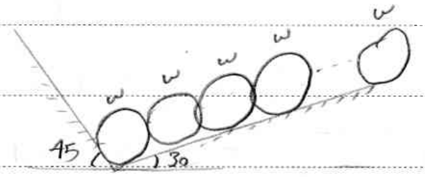


EX. (یادآوری)

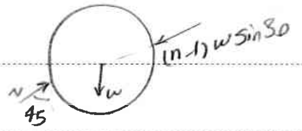
حل) دو نیروی مجهول را ادامه داده و نسبت به محل تقاطع دو نیروی مجهول گشتاور می‌گیریم.

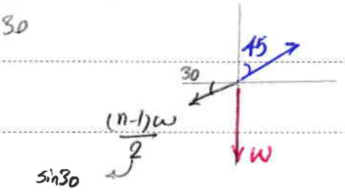
پیکر آزاد جسم را رسم می‌کنیم
if ← 4 تا نیروی مجهول ← حل می‌کنیم
if ← 3 تا نیروی مجهول ← حل می‌کنیم.

EX. حداکثر چند تا گوی اضافه شود تا جسم اول بیرون نیاید.



حل) پیکر آزاد جسم اول را رسم می‌کنیم.





$$(n-1)\frac{w}{2} = \frac{\sin 45}{\underbrace{\sin(165)}_{\sin(45-30)}} \longrightarrow n=6.24$$

اگر 6.24 گوی بگذاریم، جسم اول بیرون می‌آید،
اگر 6 تا بگذاریم بیرون نمی‌آید.

خرپا

در خرپا نیروها فقط به مفصل‌ها وارد می‌شود. (مفصل ـ مفصل ← نیروها در راستای دو مفصل است.)

از وزن میله‌ها صرف‌نظر می‌شود.

نیروها کششی یا فشاری هستند.

در کنکور نیرو در یک یا دو عضو را بیشتر نمی‌خواهد.

2 روش برای حل مسائل خرپا:

روش مفصل ← خیلی کم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

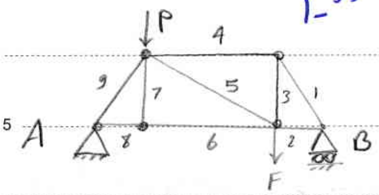
روش مقطع ← بیشتر اوقات از این روش استفاده می‌کنیم.

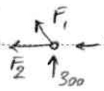
09019916762

روش مفصل:

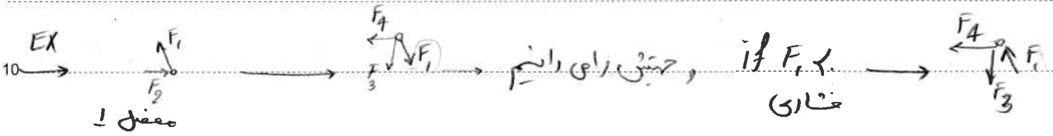
برای شروع باید از جایی شروع شود که 2 تا مجهول داشته باشیم.

ابتدا کل خرپا را یک پیکر در نظر گرفته و نیروهای عکس العمل را به دست می آوریم.



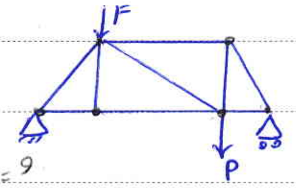
بعد از به دست آوردن نیروی عکس العمل از جایی شروع می کنیم که 2 مجهول داشته باشیم. 

نیروهای F_1 و F_2 را کششی فرض می کنیم، اگر بعد از نوشتن معادلات $\Sigma F_x=0$، $\Sigma F_y=0$، F_1 و F_2 + شدند، پس درست فرض کرده ایم، اگر منفی شدند پس باید جهت را برعکس کرد. پس سراغ مفصل دیگر می رویم.



جهتش را می دانیم، if $F_1<0$ فشاری

روش مقطع



$m=9$
$j=6$

$$\underbrace{\overset{\text{member}}{m}+\overset{\text{باید}}{R}}_{\text{تعداد مجهولات است}}=2\underset{\text{joint مفصل}}{j}\longrightarrow$$

خرپا معین و از روش استاتیک قابل حل است

Note در هر مفصل 2 معادله بیشتر نمی توان نوشت ← $2j$

$$\text{if}\begin{cases} m+R>2j \longrightarrow \text{نامعین} \longrightarrow \text{مقاومت مصالح} \\ m+R<2j \longrightarrow \text{ناپایدار} \end{cases}$$

ناپایدار ← با یک ضربه به پایین می افتد.

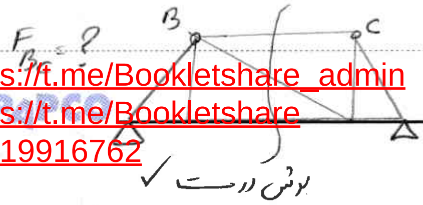
Note در سوال اگر گفت خرپا پایدار است یا نه، پایداری را چک می کنیم ولی اگر مسئله پایداری مطرح نبوده، چک نمی کنیم و حل می کنیم.

روش مقطع:

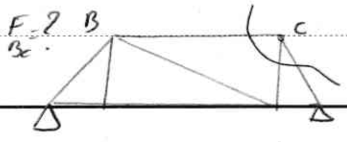
آن عضوی را که می خواهیم برش می زنیم به طوری که 3 عضو بیشتر قطع نشود و جوری قطع شود که قطعه کاملاً جدا شود و از کادر بیرون رود.

(برش از $+\infty$ تا $-\infty$)

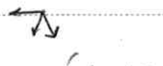
بریدن باید طوری باشد که سه نیرو از یک نقطه نگذرند (چون حل نمی شود).



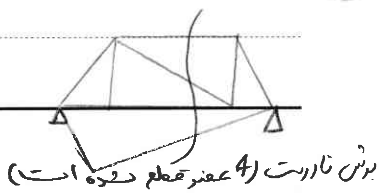
برش درست ✓



برش نادرست



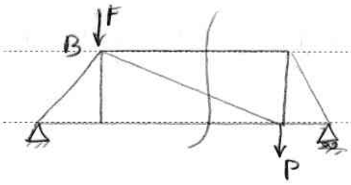
3 نیرو از یک نقطه می گذرند



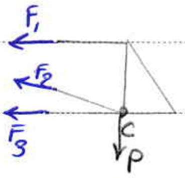
برش نادرست (4 عضو قطع شده است)

09019916762

* برای حل مسئله، بعد از برش یک قسمت را بررسی داریم، آن قسمتی را بررسی داریم که نیرو یا باید کمتر باشد (مجهول کمتر باشند) آن قسمت هایی از عضوها که اره خورده است را باید نیرو بگذاریم.



در این مثال فرقی نمی کند که کدام قسمت را برداریم.



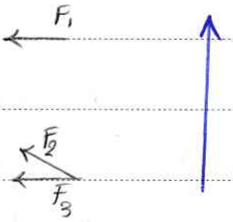
اگر F_1 را بخواهیم ← به محل برخورد F_2 و F_3 گشتاور می گیریم.

$\Sigma M_C=0 \longrightarrow F_1$ ✓

اگر F_2 را بخواهیم ← به محل برخورد F_1 و F_3 گشتاور می گیریم.

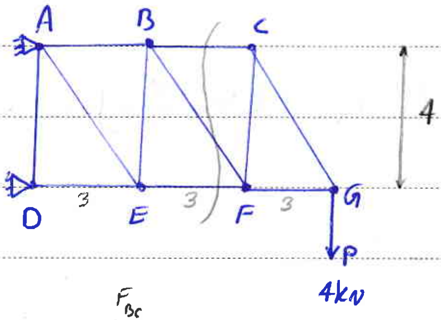
$\Sigma M_B=0 \longrightarrow F_3$ ✓

اگر 2 نیرو موازی باشند، در جهت عمود بر 2 نیروی موازی ΣF می نویسیم.



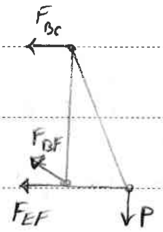
$\Sigma F_y=0 \longrightarrow F_2$ ✓

Ex. نیرو در عضو؟ $F_{BC}=?$



حل: از روش مقطع می رویم.

قسمت سمت راست را انتخاب می کنیم (مجهولات کمتر)



$\Sigma M_F=0 \longrightarrow F_{BC}\times 4-4\times 3=0 \longrightarrow F_{BC}=3kN$

که کششی فرض کرده بودیم، جواب + شد ← درست فرض کردیم.

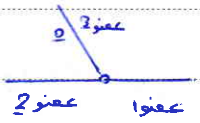
سوالهای مربوط به این بخش

1) سوال آمده کدام عضو 0 است

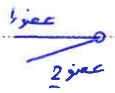
2) کدام عضو نیرو تحمل نمی کند

3) کدام عضو صرفاً جهت پایداری نصب شده است

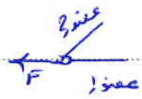
Note ***

1)


عضو 3 صفر نیرویی است

2)


عضو 1، عضو 2 0 نیرویی هستند

3)


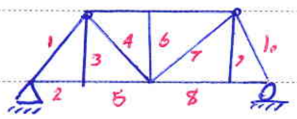
عضو 2 صفر نیرویی است.

Note ← چرا عضو 0 نیرویی را می گذارند (چون هزینه دارد)؟ جواب ← به دلیل پایداری

$m+R=2j$

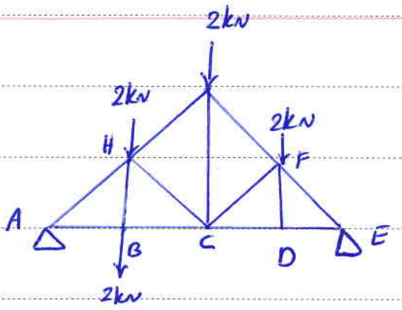
09019916762

EX. کدام عضوها ۰ هستند؟


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

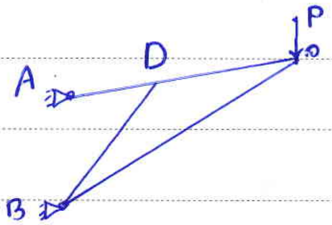
عضوهای 6 و 9

EX. $F_{DF} = ?$


2kN
2kN
2kN
H
F
A
B
C
D
E
2kN

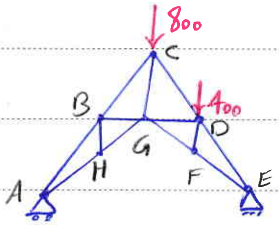
طبق نکات صفحه قبل ← $F_{DF} = 0$

EX. $F_{DB} = ?$



طبق نکات صفحه قبل $F_{DB} = 0$

EX. کدام یک از عضوهای زیر ۰ است؟

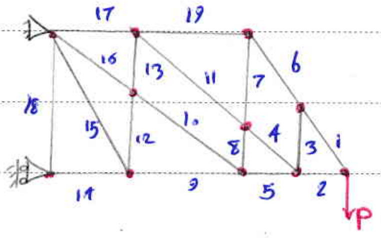

800
C
400
B
D
G
H
F
A
E

1) CD 3) HG

2) BH 4) BG

طبق نکات صفحه قبل، BH و BG صفر هستند و سوال در آن سال غلط بود.

EX. چند عضو ۰ هستند؟

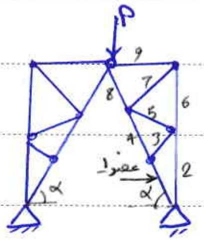

17
19
16
13
11
7
6
18
15
12
10
8
4
3
1
14
9
5
2
P

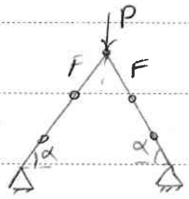
عضوهای

15 ← 12 ← 13 ← 11 ← 4 ← 3

6 عضو

EX. نیرو در عضو 1 چقدر است؟


P
9
7
8
5
6
4
3
عضو 1
2
α
α



حل: مسئله تقارن دارد.

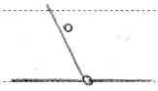
عضوهای 3، 5، 7، 6، 9، ۰ نیروی هستند ←

$$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow 2F\sin\alpha - P = 0 \longrightarrow F = \frac{P}{2\sin\alpha}$$

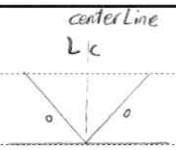
09019916762

جلسه چهارم

1)

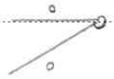


3)

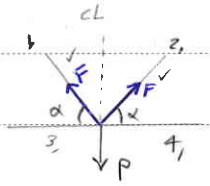


در این حالت خرپا باید هم از لحاظ نیروی و هم از لحاظ هندسی متقارن باشد.

2)



4)

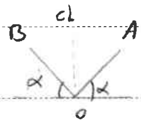


نیرو در میله های 1 و 2 قابل محاسبه است

ولی نیرو در میله های 3 و 4 قابل محاسبه نیست

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow 2F\sin\alpha = P$

5)



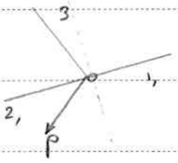
درحالت 5، خرپا نسبت به CL متقارن نیست، اگر بود که نکته 3 (هر 2 نیرو صفر می شدند)

که در این حالت $F_{OA} = F_{OB}$ است ولی کششی یا فشاری بودنشان متفاوت است.

یا F_{OA} = فشاری F_{OB} = کششی

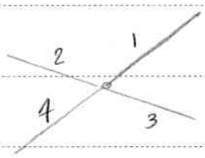
F_{OB} = کششی " F_{OA} = فشاری

6)



2 میله در یک راستا و میله 3 در راستای دیگر و یک نیرو معلوم. در این حالت نسبت به خط عمود دو میله در یک راستا $\Sigma F_y = 0$ می نویسیم و نیروی میله مجهول به دست می آید.

7)



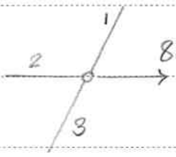
در این حالت

$F_1 = F_4 \longrightarrow$ هر دو کششی یا فشاری

$F_2 = F_3 \longrightarrow$ هر دو کششی یا فشاری

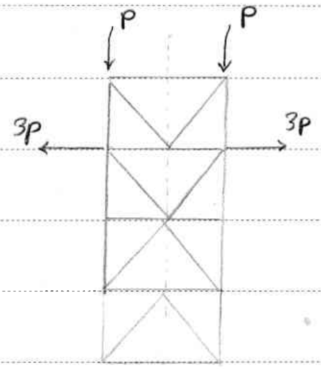
$\longrightarrow$ مقدارشان معلوم نیست

8)



$F_1 = F_3$

$F_2 = 800N$

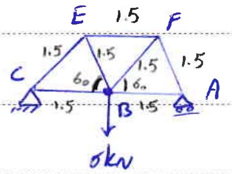


for note 3 ← Ex

باید هم نیرو و هم هندسه تقارن داشته باشد.

09019916762

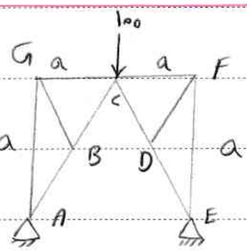
EX $F_{FB}=?$

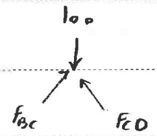

E
1.5
F
1.5
1.5
1.5
1.5
C
60
60
A
1.5
B
1.5
6kN

طبق نکته 4 ⟵ $2F_{FB}\sin\alpha=6kN \rightarrow F_{FB}=\frac{6}{\sqrt{3}}$

note ⟵ تا می‌توان باید از نکته‌ها استفاده کرد، آخرین مرحله کار برش است.

EX $F_{BC}=?$ و $F_{CF}=?$ (زوایا 45 یا ۹۰)


100
G
a
a
F
c
a
B
D
a
A
E

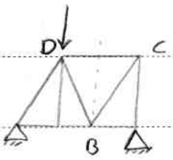


طبق نکته 4 ⟵ $F_{BC}=F_{CD}$

$\Sigma F_y=0 \rightarrow 2F_{BC}\cos 45\ 100 \rightarrow F_{BC}=50\sqrt{2}$

$F_{CF}=0$

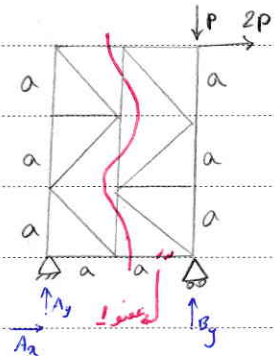
EX (از کتاب بیمز)



در این مثال، خرپا نسبت به CL متقارن نیست ولی طبق نکته 5 $F_{BC}=F_{BD}$

ولی کششی یا فشاری بودنشان متفاوت است.

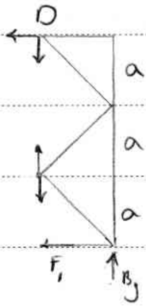
EX نیرو در عضو 1 چقدر است؟


P
2P
a
a
a
a
a
a
a
a
A_y
A_x
عضو 1
B_y

حل، در این مثال از روش برش و مفصل نمی‌توان شروع کرد.
که 3 تا نیرو قطع کند که باید 2 مجهول باشد
نکته

در این سوالات که K یا X می‌بینیم باید برش مار شکل زد به طوری که از
سمت kها حرکت کنیم.

note ⟵ اگر به جسمی n نیرو وارد شود، از n نیرو (n-1) نیرو از یک نقطه
عبور کنند، نیروی nام قابل محاسبه است. نسبت به محل برخورد
(n-1) نیرو باید گشتاور گرفت.

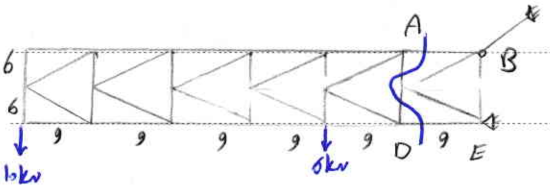


$\Sigma M_A=0 \rightarrow B_y\times 2a - p\times 2a - 2p\times 3a \rightarrow B_y=4p$

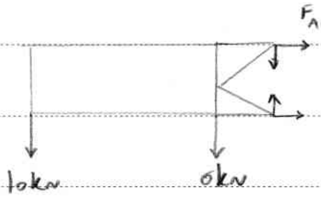
$\Sigma M_D=0 \rightarrow F_1\times 3a + 4p\times a - 4p\times a=0 \rightarrow F_1=p$

09019916762

EX. $F_{AB}=?$

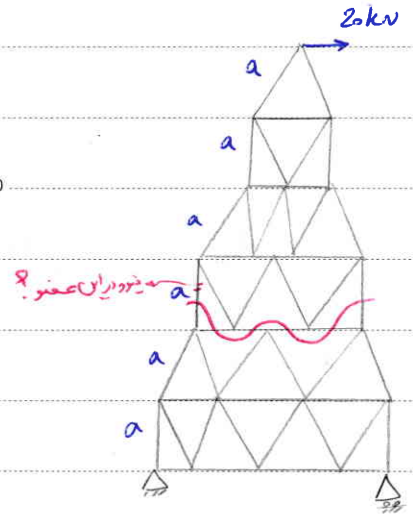

A
B
6
6
9
9
9
9
9
9
D
E
10kN
6kN

حل) k می بینیم، مقطع را به صورت مارشکل می زنیم، بعد از زدن برش، سمت چپ را بررسی داریم چون نیروها معلوم است و پایه ندارد.

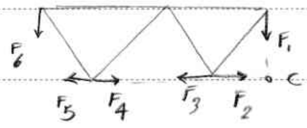

F_{AB}
10kN
6kN

$\Sigma M_O=0 \longrightarrow F_{AB}\times 12 - 10\times 36 - 6\times 9 = 0 \Rightarrow F_{AB}$ ✓

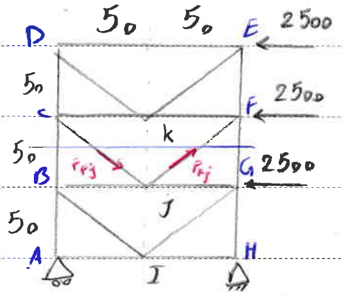
EX.


20kN
a
a
a
a
a
a
نیرو در این عضو؟

حل) برش به صورت مارشکل می زنیم و سمت بالا را انتخاب می کنیم چون نیرو معلوم است و پایه ندارد. و نسبت به نقطه c گشتاور می گیریم. تا F_6 بدست آید


F_6
F_1
F_5
F_4
F_3
F_2
c

EX. (در کتاب شیمز) $F_{FJ}=?$

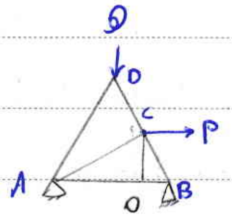

50
50
D
E
2500
50
C
F
2500
k
50
B
F_{FJ}
F_{FJ}
G
2500
J
50
A
I
H

حل) یا باید مارشکل مقطع زد و اول F_{FG} را بدست آورد و بعد از آن نسبت به نقطه c گشتاور بگیریم تا F_{FJ} بدست آید

2) می توان از نکته 5 استفاده کرد. قسمت بالا را بررسی داریم (پس از برش)

$\Sigma F_x=0 \longrightarrow 2F_J \cos 45=0 \longrightarrow F_{FJ}=2500\sqrt{2}$

EX. مثلث متساوی الاضلاع است و نقطه c در وسط ضلع DB است. $F_{AC}=?$

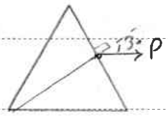


حل) $F_{CO}=0$ است. (طبق نکته ط)

پس از نکته 6 استفاده می کنیم.

می دانیم که AC (میانه، نیمساز و ارتفاع هم هست)

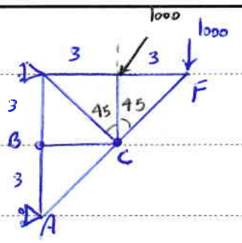
در جهت عمود بر میله DB ← ΣF می نویسیم

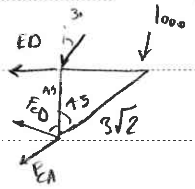


$\Sigma F=0 \quad P\cos 30 = F_{AC} \rightarrow F_{AC}=P\frac{\sqrt{3}}{2}$

09019916762

EX. $F_{CD} = ?$


1000
1000
3
3
3
3
45
45
D
B
C
F
A

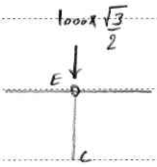

30
1000
F_{ED}
45
45
F_{CD}
$3\sqrt{2}$
F_{EA}

حل)

را با برش می توان حل کرد.

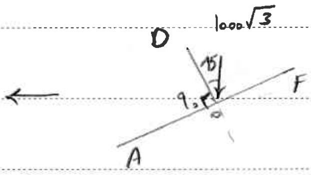
نسبت به نقطه F گشتاور بگیریم.

2) طبق نکته 4


$1000\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
E
C

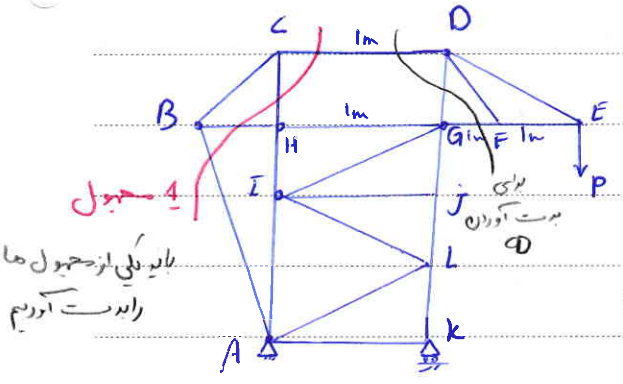
$F_{EC} = 1000\frac{\sqrt{3}}{2}$

حال طبق نکته 6


D
$1000\sqrt{3}$
45
90
F
A

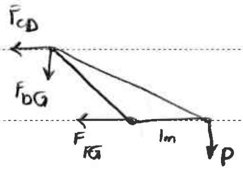
$1000\sqrt{3}\times \cos 45 = F_{CD}$

EX. $F_{BH} = ?$

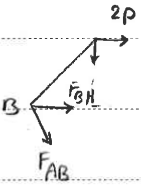

C
1m
D
B
1m
E
H
G
1m
F
1m
P
I
J
برای بدست آوردن CD
4 مجهول
باید یکی از مجهول ها را بدست آوردیم
L
A
K

حل) اگر برش بزنیم 4 تا قطع می شود که خوب نیست.

از هیچ نکته ای هم نمی توان استفاده کرد، ابتدا باید نیروی CD را باید بدست آورد، سپس برش زد. (تا 3 مجهول شود)


F_{CD}
F_{DG}
F_{FG}
1m
P

$\Sigma M_G = 0 \longrightarrow F_{CD}\times 1 - p\times 2 = 0 \longrightarrow F_{CD} = 2p$

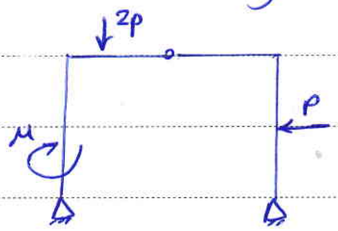


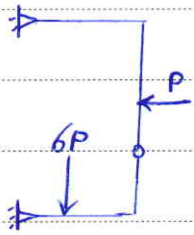
$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow F_{BH}\times 2 + 2p\times 3 = 0 \longrightarrow F_{BH} = -3p$ $F_{BH} = 3p$ فشاری

note (اکثر سوالات کنکوری با برش حل می شود به غیر از چند تا از جمله مثال بالا)

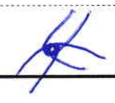
قاب ها:

در قاب ها برخلاف خرپا ها، در هرجایی می توان نیرو وارد کرد. قاب ها گشتاور را نیز تحمل می کنند.

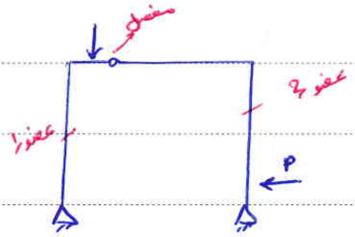




در خرپا فقط در راستای عضوها می توان نیرو وارد کرد.

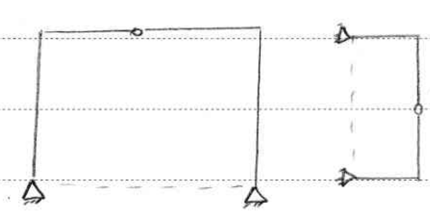


09019916762



* بیشتر سوالات کنکور ۲ عضوی بودند.

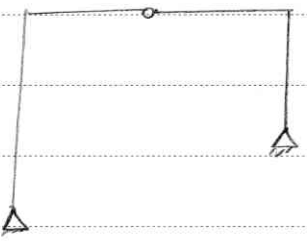
۲ عضوی ها (قابی که ۲ عضو دارد)



قاب نوع اول: (بیشتر سوالات کنکور)

۱) اولاً ۲ عضوی است.

۲) پایه ها روی سطح افقی و یا قائم در یک امتداد اند.



قاب نوع دوم:

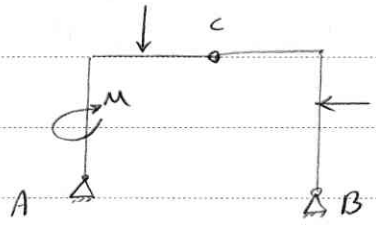
۱) ۲ عضوی است.

۲) پایه ها با هم اختلاف سطح دارند.

* سوالی که در قاب ها از ما می گیرند؟ نیرو در پایه یا مفصل چقدر است.

قاب نوع ۱ ← نیرو در پایه

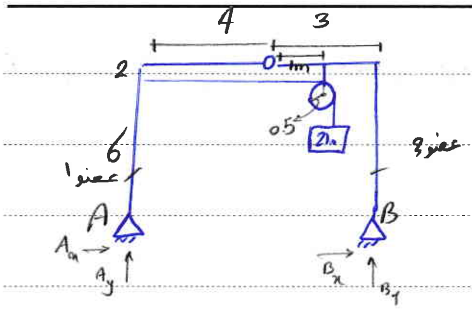
EX. نیرو در پایه A چقدر است؟



قدم اول: اگر نیروی پایه در A را خواست، کل قاب را یک پیکر در نظر گرفته و حول B گشتاور می گیریم. (پایه دیگر)

قدم دوم: عضو مورد نظر را جدا کرده و حول C (مفصل) گشتاور می گیریم تا نیرو در پایه A بدست آید.

09019916762



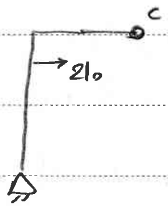
EX. نیرو در پایه A چقدر است؟

حل) قاب نوع اول است.

ابتدا کل قاب را یک پلیر در نظر گرفته و حول B گشتاور می‌گیریم.

$$\Sigma M_B = A_y \times 7 - 210 \times 1.5 \Rightarrow A_y = 45kN$$

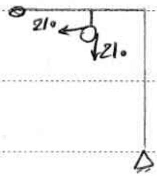
عضو ۲ را جدا کرده (طوری که از کلاس بیرون ببرد)، کشش کابل نمی‌گذارد، پس اثرش را روی عضو ۱ گذاشته و می‌بریم



$$\Sigma M_C = 0 \longrightarrow A_x \times 8 + 210 \times 2 = A_y \times 4$$

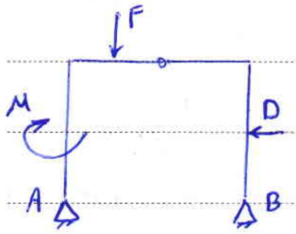
$A_x =$ ✓

if B را خواست ⟵ قدم اول ⟶ $\Sigma M_A = \longrightarrow B_y$ ✓



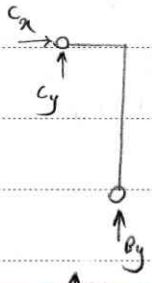
$$210 \times 1.5 + 210 \times 1 + B_x \times 8 = B_y \times 3$$

اگر در مسائل قاب نوع ۱ نیرو در مفصل را خواست:



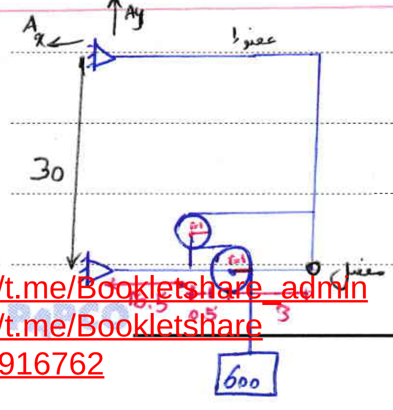
! عضوی را انتخاب می‌کنیم که نیروی کمتری رویش باشد تا محاسبات آسان‌تر شود. یا اگر عضوی راست و دیگری کج بود عضو راست را انتخاب می‌کنیم. (در اینجا ما عضو سمت راست را انتخاب می‌کنیم)

ابتدا نسبت به A گشتاور می‌گیریم تا B_y بدست آید.



پس عضو را جدا کرده و ΣF_y می‌نویسیم ⟵ C_y ✓

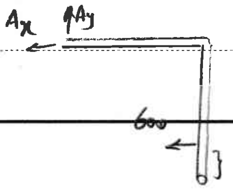
سپس نسبت به B گشتاور می‌گیریم تا C_x بدست آید.



EX. نیرو در مفصل چقدر است؟

حل) ابتدا نیرو در A را بدست آوریم

$$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow A_x \times 30 - 600 \times 18 \longrightarrow A_x = 360$$



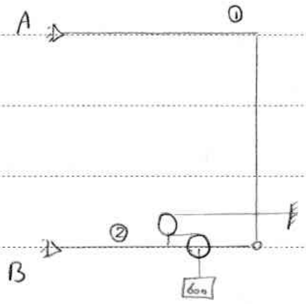
حال عضو ۱ را جدا می‌کنیم (ببریم بیرون کلاس)

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow A_y \times 19 - \underbrace{360}_{A_x} \times 30 - 600 \times 3 = 0 \Rightarrow A_y ✓$$

$C_x = A_x + 600$, $C_y = A_y$

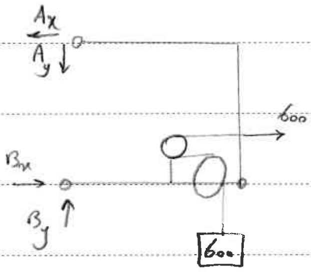
09019916762

جلسه پنجم

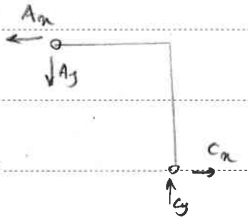


EX. نیروی پایه و نیروی مفصل :

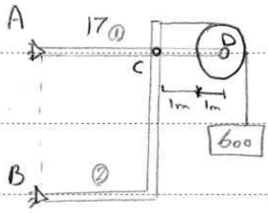
برای بدست آوردن نیرو در پایه A ، ابتدا کل قاب را در نظر گرفته طوری که کل قاب از کلاس بیرون بوده (D: در اینجا نیروی کشش طناب نقش ندارد و باید طناب بریده شود و جای آن نیرویش (اثرش) گذاشته شود.


A_x
A_y
600
B_x
B_y
600

پس از بدست آوردن نیروی A حال نیروی مفصل C را باید بدست آوریم که عضو را جدا کرده طوری که از کلاس بیرون رود . که در این مثال به راحتی جدا شده زیرا کابل به عضو 1 متصل نیست .



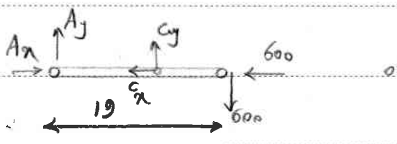
EX. نیرو در پین C چقدر است ؟


A
17 ①
C
D
1m 1m
600
B
②

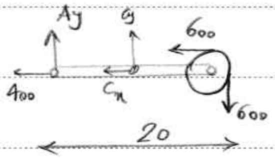
حل) عضو 1 را انتخاب می کنیم .

$\Sigma M_B=0 \longrightarrow \Sigma M_B=0 \longrightarrow A_x \times 30 - 600 \times 20 = 0 \longrightarrow A_x = 400$

حال عضو 1 را جدا می کنیم (طوری که ....)


A_x
A_y
C_y
600
C_x
19
600

or

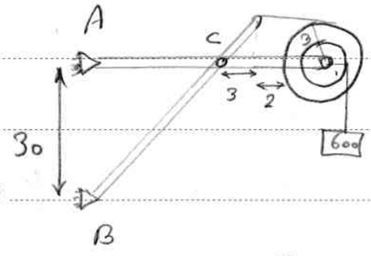

A_y
C_y
600
400
C_x
600
20

چون در قرقره کوپل در نقطه D (مرکز) صفر است ، می توان نیروها را انتقال داد به نقطه D

$\Sigma F_x=0 \longrightarrow C_x - 400 - 600 = 0 \longrightarrow C_x = 1000$

$\Sigma M_A=0 \longrightarrow C_y \times 17 = 600 \times 200 - 600 \times 1 \longrightarrow C_y ✓$

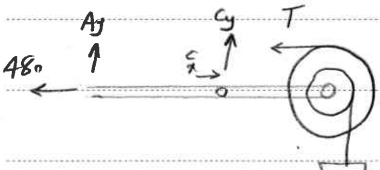
EX. نیرو در پین C چقدر است ؟

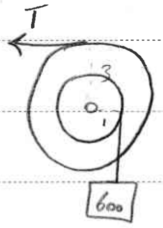

A
C
3
3 2
600
30
B

حل) $\Sigma M_B=0 \longrightarrow A_x \times 30 - 600 \times 26 = 0 \longrightarrow A_x = 480$

عضو 1 را جدا می کنیم (طوری که ...) چون تعداد مجهولات 4 تا است

ابتدا باید نیروی T را بدست آوریم


480
A_y
C_y
C_x
T

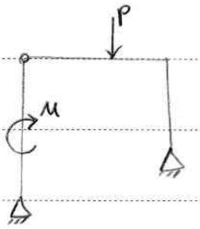


$T \times 3 = 600 \times 1 \longrightarrow T = 200$

09019916762

$\Sigma F_x=0 \longrightarrow C_x ✓$

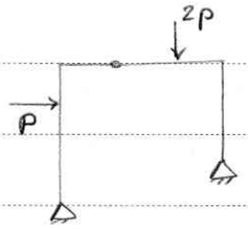
$\Sigma M_A=0 \longrightarrow C_y ✓$



قاب نوع دوم:

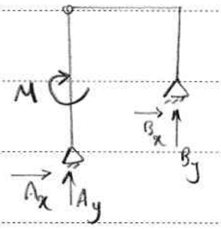
حالت اول: اگر یکی از مولفه‌های پایه از مفصل عبور کند.

و پایه‌ها در یک امتداد نباشند.



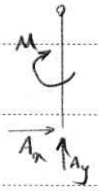
حالت دوم: نیرو پایه از مفصل عبور نکند.

EX نیرو در پایه A چقدر است؟



حل:

* ابتدا عضوی که نیروی پایه‌اش از مفصل می‌گذرد را در نظر می‌گیریم و گشتاور را حول مفصل می‌گیریم. (شرط مهم این است که عضو انتخاب شده از کاس بیرون رود)

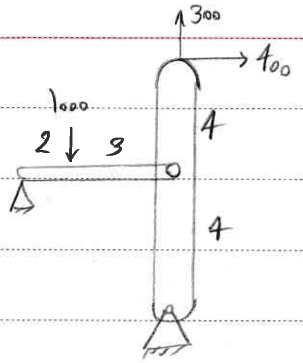


$\Sigma M_C = 0 \longrightarrow A_x \checkmark$

* در گام بعدی کل قاب را در نظر گرفته و حول پایه دیگر گشتاور می‌گیریم

* اگر نیرو در پایه B را هم خواست اول عضوی را در نظر می‌گیریم که امتداد نیرویش از مفصل بگذرد.

EX نیرو در پایه B؟



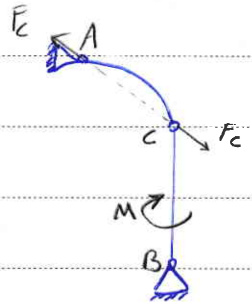
حل: قاب نوع ۲ حالت اول

عضوی که امتداد نیرویش از C بگذرد را انتخاب می‌کنیم (در اینجا فرقی ندارد)

$\Sigma M_C = 0 \quad 400\times4 - B_x\times4 = 0 \qquad B_x = 400$

$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow B_y \checkmark$

EX

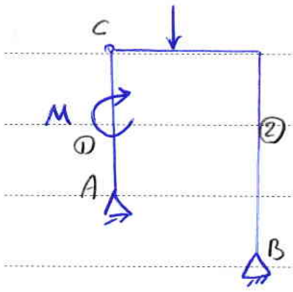


Note ← در سوالات اگر توانستیم از عضو ۲ نیرویی استفاده کنیم.

$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow F_C = F_A \checkmark$

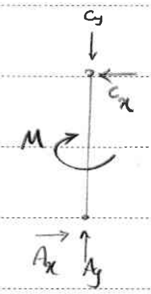
09019916762

Ex. نیرو در پین C را می‌خواهد.



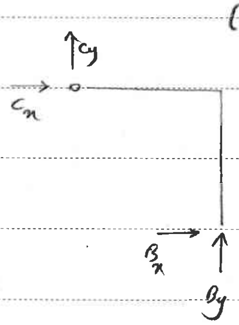
حل) قاب نوع دوم حالت اول

عضو 1 را در نظر می‌گیریم (عضوی که ...)



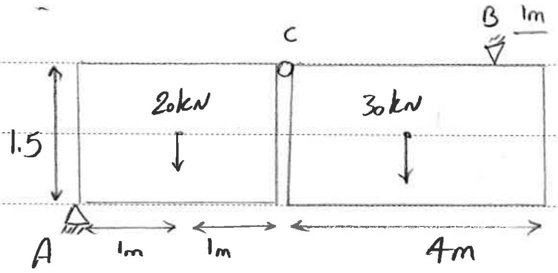
$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow C_x$ ✓

حال C_x که در عضو یک بدست آوردیم برعکسش را در عضو 2 می‌گذاریم (عمل و عکس العمل)



$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow C_y$ ✓

Ex. نیرو در پین C ؟



حل)

قاب نوع 2 حالت اول

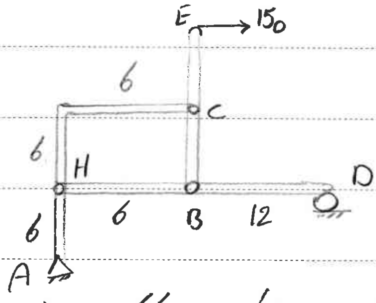
چون امتداد نیروی B از پین می‌گذرد.

$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow C_y \times 3 - 1 \times 30 \longrightarrow C_y = 10\,kN$

حال عضو 2

$\Sigma M_A = 0 \quad C_x \times 1.5 - 20 \times 1 + \overset{10}{\overset{\leftrightarrow}{C_y}} \times 2 = 0 \longrightarrow C_x$ ✓

Ex. نیرو در پین B چقدر است؟



حل)

3 عضو دارد ← پس قاب نوع اول و دوم نیست.

عضو BOH را انتخاب می‌کنیم.

عضو HBD 5 مجهول دارد ← نمی‌توان حل کرد (حداکثر 3 مجهول ($\Sigma F_x = 0$، $\Sigma F_y = 0$، $\Sigma M = 0$) پس از کل قاب کمک می‌گیریم

به شرط آنکه از کل پین بیرون رود.

باز هم 4 مجهول مانده از BCE کمک می‌گیریم.

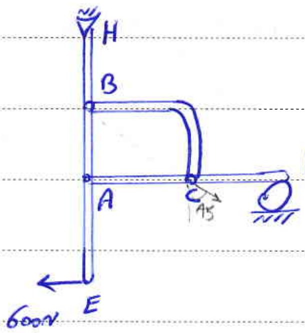
$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow D_y \times 18 - 15 \times 8 = 0 \longrightarrow D_y = 150$

$\Sigma M_C = 0 \longrightarrow 150 \times 6 = B_x \times 6 \longrightarrow B_x = 150$

حال در عضو HBD ΣM_H می‌گیریم ← $\Sigma M_H = 0 \longrightarrow B_y$ ✓

09019916762

EX. F_B چقدر است؟

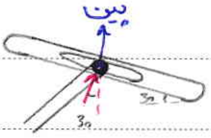


حل) $\Sigma M_H = 0 \rightarrow D_y \times 12 = 600 \times 18 \rightarrow D_y = 900$

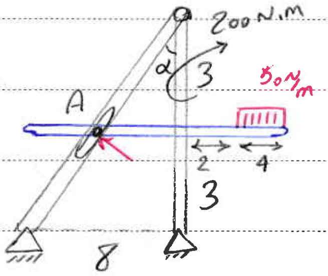
BC دونیروی است ⟵ $\Sigma M_A = 0 \rightarrow F_B$ ✓

Note پین درحالت کلی 2 مجهول دارد.

ولی در این جور اتصال ها نیرو عمود بر شیار است.



EX. نیرو در پین B=?



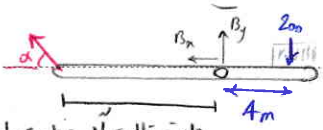
$\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

$tg\alpha = \frac{4}{3}$

حل) عضو ABC را انتخاب می کنیم (با توجه به نکته بالا)

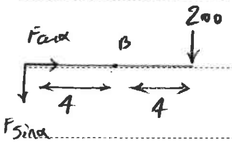
فقط 3 مجهول داریم پس نیازی به تفکیک نیست



طبق تالس اگر خطی موازی با قاعده

از وسط ضلع آنکری بگذرد، طولش نصف

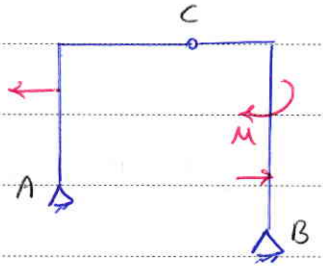
قاعده است. ⟵ 4



$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow F$ ✓ $\longrightarrow B_x$ و B_y ✓

EX. قاب نوع دوم حالت دوم

نیرو در پایه A چقدر است؟



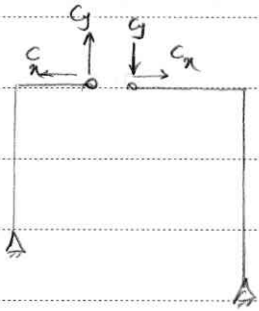
حل) کل قاب را در نظر گرفته و ΣM_B می نویسیم. $\xleftarrow{EX}$ $2A_x + 3A_y = 48$

حال عضوی که پایه A در آن است را انتخاب کرده و حول مفصل C

گشتاور می گیریم. $\Sigma M_C = 0 \longrightarrow 3A_x - A_y = 8 \xleftarrow{EX}$

حال 2 معادله، 2 مجهول بالا را حل کرده و A_x و A_y بدست می آید.

حال نیرو در C چقدر است؟



دو عضو را جدا کرده و هر بار نسبت به یک پایه گشتاور می گیریم

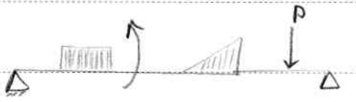
$$\begin{cases} \Sigma M_A = 0 & 3C_x + C_y = 600 \\ \Sigma M_B = 0 & 5C_x - 2C_y = 800 \end{cases} \longrightarrow$$

دو معادله و دو مجهول

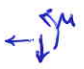
C_x و C_y ✓

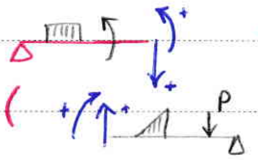
09019916762

رسم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی



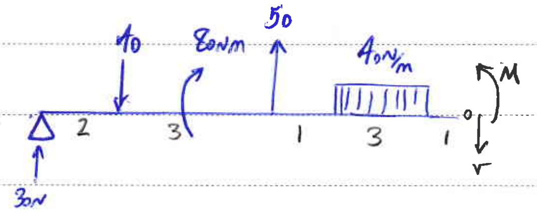
قرارداد: اگر تیر را در نقطه‌ای برش زدیم (برش در تیر مانند تکیه‌گاه جوش است ولی نیروی ← به درد ما نمی‌خورد) اگر سمت چپ تیر را برداشتیم، جهت مثبت





و اگر سمت راست را برداشتیم،)

EX



$\Sigma F = 0 \longrightarrow 30 - 40 + 50 - 120 - V = 0 \longrightarrow V = -80$

$\circlearrowleft + \Sigma M_o = 0 \quad -30\times 9 + 40\times 7 - 80 - 50\times 5 + 12.5\times 120 + M = 0 \longrightarrow M \checkmark$

* ولی ما مثل بالا عمل نمی‌کنیم

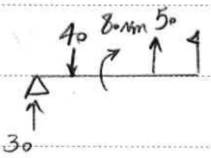
در هر نقطه‌ای خواستیم M و V را بدست آوریم یک ناظر زده و به تکیه‌گاه نگاه می‌کنیم

نیروهایی که به سمت بالا باشند مثبت در نظر می‌گیریم*

نیروهایی که به سمت پایین باشند منفی در نظر می‌گیریم*

ممان در جهت ساعتگرد را مثبت در نظر می‌گیریم*

ممان در جهت پادساعتگرد را منفی در نظر می‌گیریم*



$V = 30 + 50 - 40 = +40$

$M = +80$

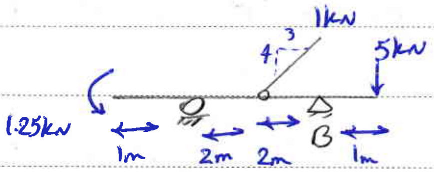
* اگر سمت راست را برداشتیم یک ناظر به سمت تکیه‌گاه می‌زنیم و همه‌ی قوانین بالا را برعکس اعمال می‌کنیم.

نیرو سمت بالا ← منفی　　نیرو سمت پایین ← مثبت

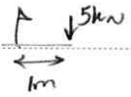
ممان ساعتگرد ← منفی　　ممان پادساعتگرد ← مثبت

Note ← بهتر است سمت چپ را نگاه کنیم.

EX گشتاور خمشی در B چقدر است؟



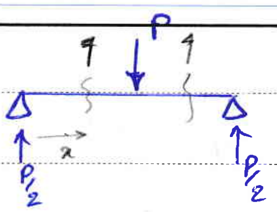
حل) چون سمت چپ شلوغ است، سمت راست را برمی‌داریم.



$$\begin{cases} V = +5kN \\ M = -5kNm \end{cases}$$

09019916762

روش uni



EX. نمودار گشتاور خمشی و برشی را رسم کنید؟

حل)

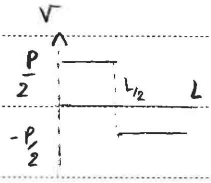
* هر موقع تغییر نیرو داشتیم ← قطعه بعدی شروع می‌شود.

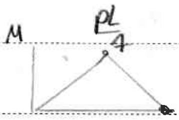
در این مثال ۲ قطعه داریم.

* در نقطه ۲ نیروی برشی نامعین است و مقدار ندارد.

$1\begin{cases}V=\frac{P}{2}\\ M=\frac{P}{2}x\end{cases}\quad 0\leq x\leq \frac{L}{2}$

$2\begin{cases}V=-\frac{P}{2}\\ M=\frac{P}{2}x-(px-\frac{L}{2})\end{cases}\quad \frac{L}{2}\leq x\leq L$

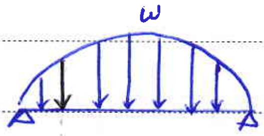




↳ مفصل M=0

* ولی ما روش بالا را نمی‌رویم.

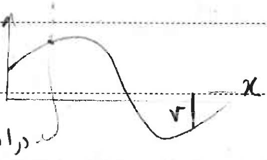
EX نمودار گشتاور خمشی و برشی را رسم کنید.



قرارداد: w به سمت پایین باشد + است. ↓↓↓↓↓

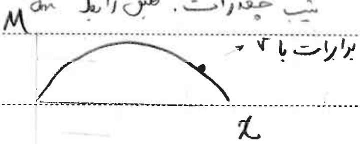
اگر بالا بود ↑↑↑ منفی (−) است.

$* \frac{dM}{dx}=V$ ، $* \frac{dV}{dx}=-w$



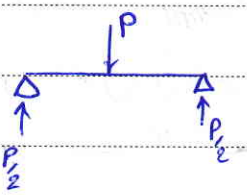
الف EX ←

در این نقطه شیب چقدر است؟ طبق رابطه $\frac{dV}{dx}=-w$ برابر است با $-w$



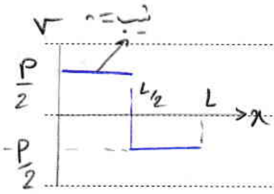
شیب چقدر است؟ طبق رابطه $\frac{dM}{dx}=V$ برابر است با V ←

EX. نمودار گشتاور خمشی و برشی را رسم کنید؟



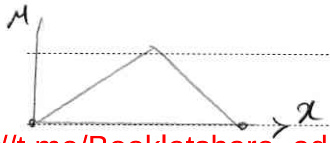
حل) با توجه به نیروی $\frac{P}{2}$ در پایه، در نمودار V-x از $\frac{P}{2}$ شروع می‌کنیم ولی بعد از $\frac{P}{2}$ تا P چون باری روی تیر نیست پس شیب = ۰ است تا زمانی که به P برسد، زمانی که به P رسید به اندازه P و با توجه به علامتش

$\begin{cases}\text{if} \rightarrow P>0 & \text{به سمت بالای رویم به اندازه } P\\ \text{if} \rightarrow P<0 & \text{به سمت پایین رویم به اندازه } P\end{cases}$



* برای رسم نمودار V، اگر بار داریم تاثیر می‌دهیم

* برای نمودار M اگر (ممان) داریم اثر می‌دهیم.



* باز هم از روش بالا نمی‌رویم.

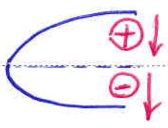
09019916762

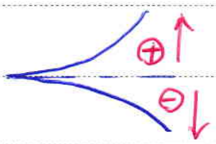
↑ شیب افزایش پیدا می‌کند ↓ شیب کاهش پیدا می‌کند

⊕ ← شیب + ⊖ ← شیب -

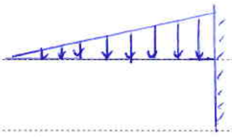
روش ما

* در گوشه کاغذ چه پیکان رسم می‌کنیم

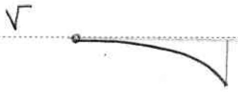


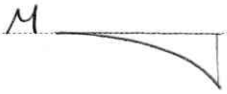


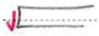
EX رسم نمودار لنگر خمشی و برشی



حل)

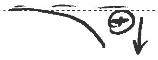


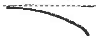


Note ← در ابتدای تیر V=0 است چون جا را است و نیروی برشی  وارد می‌شود و بار به

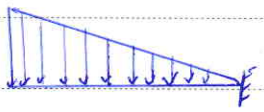
چون W>0 است ← $\frac{dV}{dx}<0$ است یعنی شیب منفی و

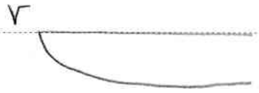
چون W درحال زیاد شدن است پس، شیب هم زیاد می‌شود

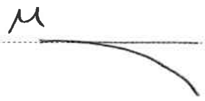
یعنی حالت 

برای رسم M چون V<0 و درحال زیاد شدن است ← 

EX



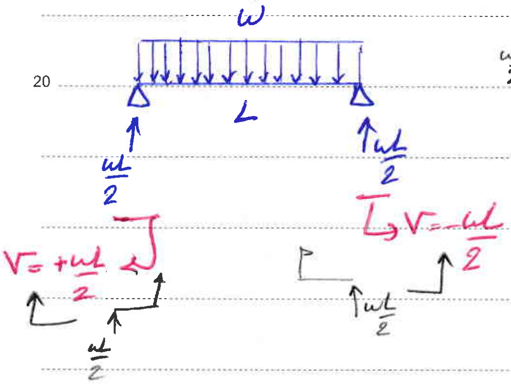


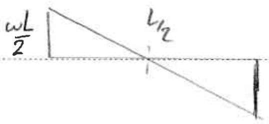


V ← شیب منفی و درحال کاهش

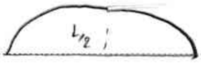
M ← شیب منفی و درحال افزایش

EX بار ما ثابت است


w
L
$\frac{wL}{2}$
$\frac{wL}{2}$
$V=+\frac{wL}{2}$
$V=-\frac{wL}{2}$
$\frac{wL}{2}$
$\frac{wL}{2}$



V ← شیب منفی و ثابت و باید به $\frac{L}{2}$ باید ختم شود.



Note ***

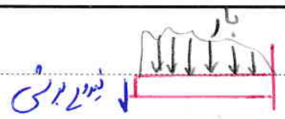
M ← تا $\frac{L}{2}$، شیب + و درحال کاهش

از $\frac{L}{2}$ تا L، شیب - و درحال افزایش

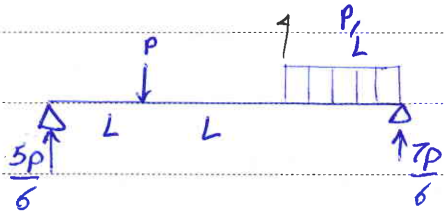
M در اول و آخر 0 است.

09019916762

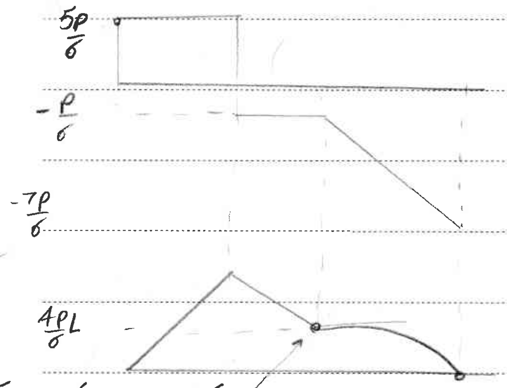
Note


بار
نیروی برشی

EX.


P
P/L
L
L
5P/6
7P/6

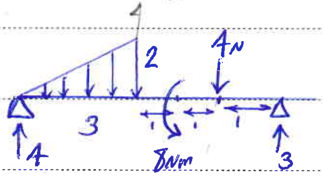
$M = \frac{5P}{6}\times 2L - P\times L = \frac{4PL}{6} \longrightarrow M>0$

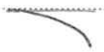

5P/6
-P/6
-7P/6
4PL/6

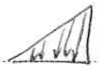
ازکجا بفهمیم تا کجا پایین آید

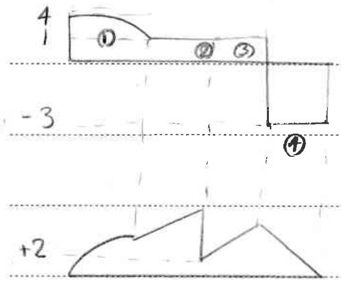
EX

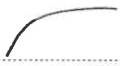
$\rightarrow V = 4 - \frac{2\times3}{2} = 1$


2
4N
3
1
1
8Nm
4
3



V ←  منفی (شیب) درحال افزایش (شیب)

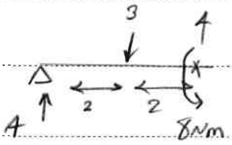




M ← ① ← مثبت (شیب) درحال کاهش (شیب)

② ← مثبت (شیب) ثابت (شیب)

③ ← اعمال 8Nm چون پادساعتگرد است پایین می‌آییم به اندازه 8Nm ولی تا کجا باید پایین بیاید.



$M = 4\times 4 - 3\times 2 - 8 = +2$

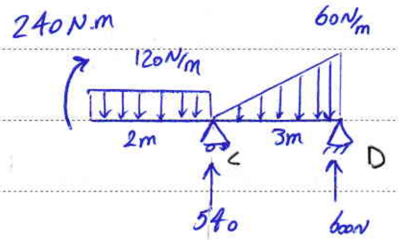
④ ← منفی (شیب) ثابت (شیب)

تا جایی پایین می‌آید تا که M=٠ شود که مفصل ممان تحمل نمی‌کند

09019916762

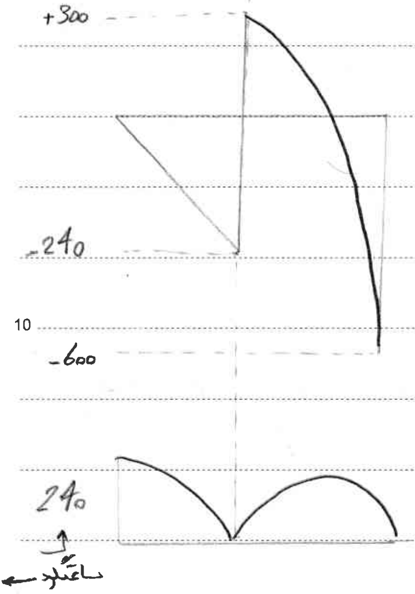
جلسه ششم

EX. نمودارهای خمشی و برشی تیر روبه رو را رسم کنید.

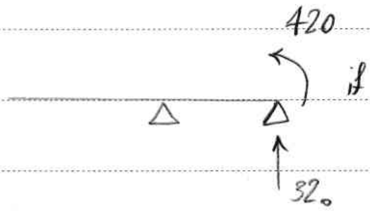

240 N.m
120 N/m
60 N/m
2m
3m
C
D
540
600N

Note ⟵ اگر پایه ها در اول و آخر تیر باشند ⟵ $M=0$

ولی اگر تیر در وسط دارای پایه باشد ⟵ ممکن است $M\neq0$ (پس نمی توان چشم بسته گفت $M=0$ باید بدست آورد)


+300
-240
-600
240
+ ← ساعتگرد

Note ⟵ نیروی برشی در نقطه C نامعلوم است زیر چپ آن -240
حد راست آن +300

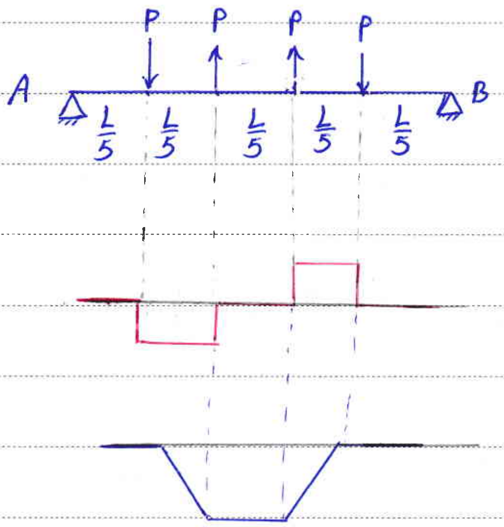


Note ⟵ if

$V=-320$

$M=+420$ (پادساعتگرد)

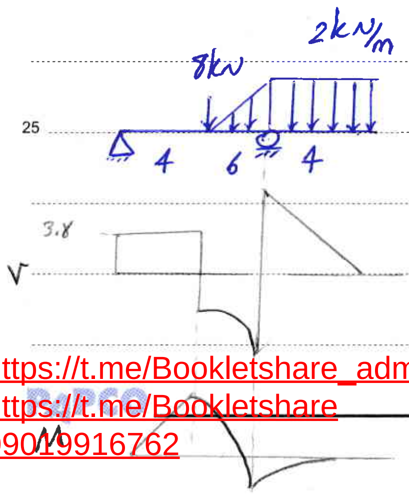
EX


P
P
P
P
A
B
L/5
L/5
L/5
L/5
L/5

$\circlearrowleft^{+}\ \Sigma M_B=0 \longrightarrow P\times\frac{L}{5}-P\times\frac{L}{5}+A_y\times L=0 \longrightarrow A_y=0$ (کوپل)

$\Sigma F_y=0 \longrightarrow B_y=0$

EX

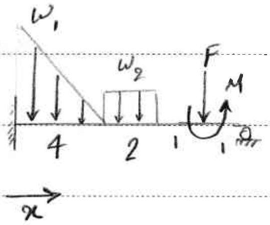

2kN/m
8kN
4
6
4
3.8
V
M

$\Sigma M_B=0 \longrightarrow A_y\times10-8\times6-6\times1+8\times2=0 \longrightarrow$

$A_y=3.8$

$\Sigma F_y=0 \longrightarrow B_y=8+6+8-3.8=18.2$

09019916762


w_1
w_2
F
M
4
2
1
1
x

EX در شکل زیر کدام گزینه برای توزیع گشتاور خمشی در طول تیر صحیح است؟

1) مقدار گشتاور خمشی در نقطه $x=8m$ برابر با M است.

2) تابع توزیع گشتاور خمشی در فاصله $4m < x < 6m$ به صورت $ax+b$ است.

3) 〃 〃 〃 〃 $x < 4m$ به صورت ax^3+bx^2+cx+e می‌باشد.

4) 〃 〃 〃 〃 $6m < x < 7m$ به صورت ax^2+bx+c می‌باشد.

1) خیر ← $M=0$ (باید در انتها) ← X غلط

2) $w=cte$ ← $\frac{dv}{dx}=-w$ ← $V=ax+b$ ← $\frac{dM}{dx}=V$ ← $M=ax^2+bx+c$ ← X غلط

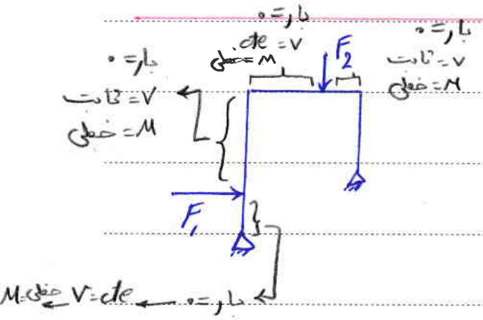
3) ✓ ← $w=ax+b$ ← $V=ax^2+bx+c$ ← $M=ax^3+bx^2+cx+c$ ← ✓ صحیح

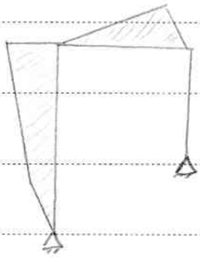
4) $w=0$ ← $V=cte$ ← $M=ax+b$ ← X غلط

if ← 5) در $x=7$ گشتاور ما M است ← X در $x=7$ ناپیوسته است.

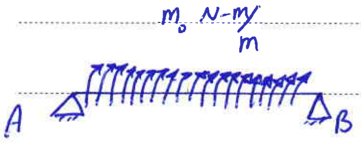
if ← 6) در $x=7$ نیروی برشی ما F است ← X در $x=7$ ناپیوسته است.

EX نمودار گشتاور خمشی شکل روبه‌رو به چه صورت است؟

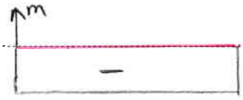

بار=0
cte=V
خطی=M
F_2
بار=0
ثابت=V
خطی=M
بار=0
ثابت=V
خطی=M
F_1
M=خطی V=cte ← بار=0



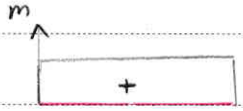
EX نمودار گشتاور خمشی شکل روبه‌رو چی می‌شود؟



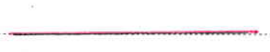
1)



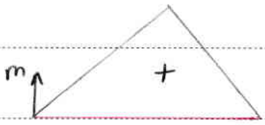
2)

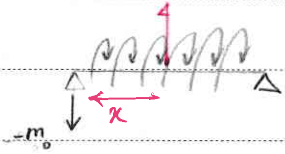


3)



4)





روش 1) شکل ما یک قطعه است. $\Sigma M_B=0 \longrightarrow m_0L + A_y L \rightarrow A_y=-m_0$

$M(x)=-m_0x+m_0x=0 \longrightarrow$ M در هر نقطه‌ای 0 است

گزینه 3 درست است.

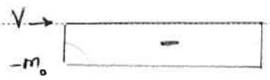
09019916762

روش 2: گشتاور گسترده روی تیر

Note ← درواقع رابطه $\frac{dv}{dx}=-w$ و $\frac{dM}{dx}=V+m_0$ است، البته به صورت قبل حفظ کنیم بهتر است.

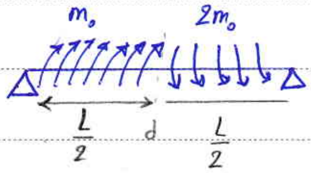
حل از طریق Note بالا

$A_y=-m_0 \longrightarrow$ در طول تیر بار گسترده نداریم

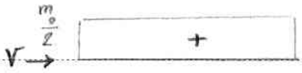


$$\frac{dM}{dx}=V+m = -m_0+m=0 \quad m\rightarrow$$

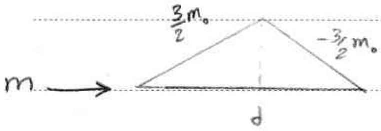
EX



$$\Sigma M_B=0 \xrightarrow{+\circlearrowleft} -A_y\times L-\frac{m_0L}{2}+2m_0\times\frac{L}{2}=0 \longrightarrow A_y\times L=\frac{m_0L}{2} \longrightarrow A_y=\frac{m_0}{2} \quad , \quad \overset{\Sigma F_y=0}{B_y}=-\frac{m_0}{2}$$

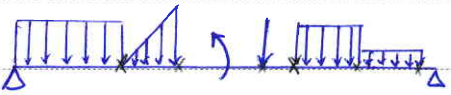


$$\frac{dM}{dx}=V+m \xrightarrow{\text{تا نقطه } d} \frac{dM}{dx}=\frac{m_0}{2}+m_0=\frac{3}{2}m_0$$



از d به بعد $\frac{dM}{dx}=V+m \longrightarrow \frac{m_0}{2}-2m=-\frac{3}{2}m_0$

EX در کجای تیر M_{max} می‌شود.



راه حل کلی ← اولین می بینیم که چند قطعه است ← (در این مثال ← 6 قطعه)

در هر قطعه M را حساب کرده و مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم، اگر x بدست آمده در بازه مورد نظر آن قطعه بود ← امکان دارد در آنجا max شود و اگر در بازه نبود، در آنجا M_{max} نمی‌شود.

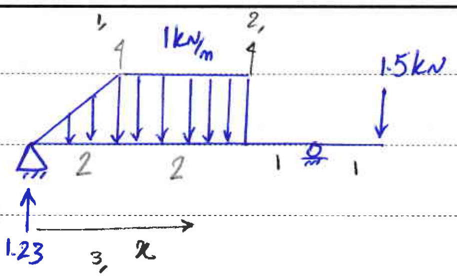
روش حل ما:

1) اگر نیروی برشی (گسترده) بود ← در اول و آخر بار گسترده نیروی برشی را حساب می‌کنیم. اگر علامت برشی در ابتدا و انتهای بار هم علامت شد ← در آنجا M_{max} اتفاق نمی‌افتد. اگر غیر هم علامت شد ← در آنجا M_{max} اتفاق می‌افتد.

جایی که $V=0$ است ← M_{max} می‌شود.

2) زیر بار متمرکز و M متمرکز هم چک شود.

09019916762



EX. M_{max} چقدری شود؟

حل: ابتدا، بار را در اول و انتهای بارگسترده به دست می‌آوریم.

1,
$V = 1.23 - 1 = 0.23 \longrightarrow 1.23 \oplus \quad 0.23 \oplus \longrightarrow$ اتفاق نمی‌افتد. در $x < 2$

2,
$V = 1.23 - 1 - 2 = -1.75 \longrightarrow 0.23 \oplus \quad -1.75 \ominus \longrightarrow$ اتفاق می‌افتد $2 < x < 4$ در

در $4 < x < 5$ ← V ثابت ← اتفاق نمی‌افتد.

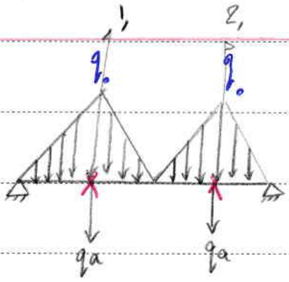
در $x = 5$ باید چک شود ← $M = -1.5 \times 1 = -1.5$

3, در $2 < x < 4$ $\xrightarrow{V(x)=0}$ $V = +1.23 - 1 - 1(x-2) = 0 \Rightarrow \underline{x = 2.23}$

در این فاصله M_{max} می‌شود. ↳

$M(2.23) = 1.23(2.23) - 1 \times (2.23 - \frac{2}{3}) - 1 \times \frac{(2.23-2)}{2} = 0 \longrightarrow M$ ✓

با مقایسه M به دست آمده و $M = 1.5$، Max را انتخاب می‌کنیم.



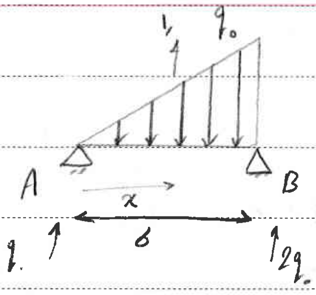
EX. گشتاور Max در تیر چقدر است؟

حل: جسم ما 4 قطعه است.

$A_y \times 4a - qa(2a) = 0 \longrightarrow A_y = \frac{qa}{2}$

1, $V = \frac{qa}{2} - \frac{qa}{2} = 0 \xrightarrow{\text{حالت } M_{max}} M_{max} = \frac{qa}{2} \times a - \frac{qa}{2} \times \frac{a}{3} \longrightarrow M = \frac{qa^2}{3}$

2, $V = \frac{qa}{2} - \frac{qa}{2} = 0 \xrightarrow{\text{حالت } M_{max}} M_{max} = \frac{qa}{2} \times a - \frac{qa}{2} \times \frac{a}{3} \longrightarrow M = \frac{qa^2}{3}$



EX. در چه نقطه‌ای M_{max} است؟

حل:

چون نیرو برشی در اول و آخر علامتش متفاوت است (نیرو در پایه‌ها) پس بین 2 پایه M_{max} می‌شود.

$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow A_y \times 6 - \frac{q_0 \times 6}{2} \times 2 = 0 \longrightarrow A_y = q_0$ ، $\Sigma F_y = 0 \longrightarrow B_y + q_0 - 3q_0 = 0 \longrightarrow B_y = 2q_0$

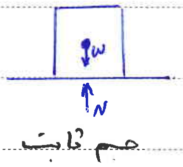
$V = q_0 - \frac{q_0 x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2$

$M(2) = q_0 \times 2 - \frac{q_0 \times 2}{2} \times \frac{1}{3} = 0 \longrightarrow M_{max}$ ✓

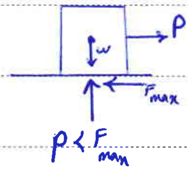
09019916762

اصطکاک

note ← ابتدا فصل 2 و 3 و بعد از آن خرپا و اصطکاک از اهمیت زیادی برخوردار هستند.

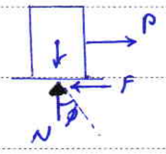


جسم ثابت



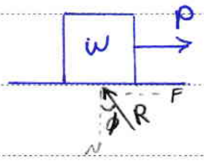
$P < F_{max}$

اعمال نیروی P ($P < F_{max}$)



اعمال نیروی P ($P > F$)

در اصل

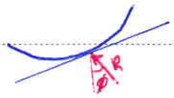


$tg\,\phi = \frac{F}{N}$ و $tg\,\phi = \mu$ ← ضریب اصطکاک

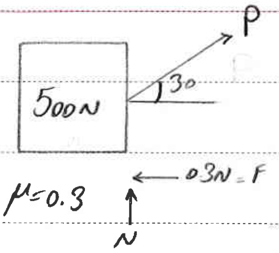
$\mu = \frac{F}{N} \Longrightarrow$ ** $\mu N = F$ ← نیروی اصطکاک

N ← نیروی عمود بر سطح

(جسم در آستانه حرکت)



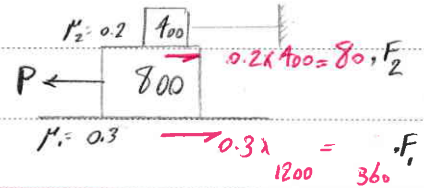
EX. P چقدر باشد تا نیروی P جسم تحت در آستانه حرکت قرار بگیرد.



$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow N + P\sin 30 - 500 = 0 \longrightarrow N = 500 - P\sin 30$

$F = 0.3(500 - P\sin 30)$ و $\Sigma F_x = 0 \quad P\cos 30 - F = 0 \longrightarrow P\cos 30 = 0.3(500 - P\sin 3) \longrightarrow P$ ✓

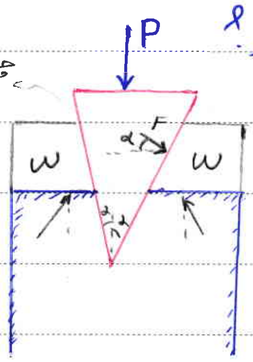
EX. P چقدر باشد تا شروع به حرکت کند؟



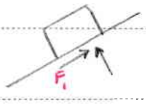
$P = F_1 + F_2 = 440$

EX. در شکل مقابل، مخروط سبک و بدون وزن است. بین بلوک و مخروط اصطکاک وجود دارد. نیروی P حداقل چقدر باشد تا دو بلوک کناری در آستانه حرکت قرار بگیرند؟

اصطکاک چون وجود ندارد F عمود بر سطح

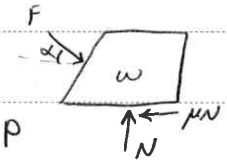


حل) اگر در سطح اصطکاک نباشد، فقط نیروی افقی وجود دارد.



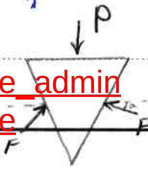
if $\mu = 0 \longrightarrow$ $F_1 = 0$ فقط نیروی عمود بر سطح (N) وجود دارد.

if $\mu \neq 0 \longrightarrow$ $F_1 \neq 0$ نیروی عمود بر سطح و F وجود دارد.



$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow F\sin\alpha + w - N = 0 \longrightarrow N = F\sin\alpha + w$

$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow \mu N = F\cos\alpha \longrightarrow \mu(F\sin\alpha + w) = F\cos\alpha \longrightarrow$

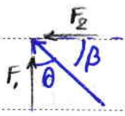


$\Sigma F_y = 2F\sin\alpha = P \longrightarrow F = \frac{P}{2\sin\alpha}$

$\mu \times \left(\frac{P}{2\sin\alpha}\sin\alpha + w\right) = \frac{P}{2\sin\alpha}\cos\alpha \longrightarrow P$ ✓

$P = \frac{2w}{\cot g\,\alpha - \mu}$

09019916762

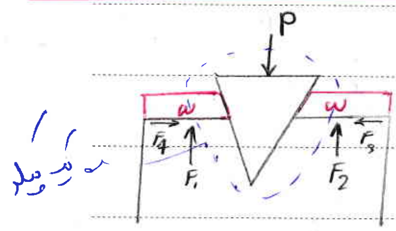


$$* \begin{cases} F_2 = F_1\, tg\,\theta \\ F_1 = F_2\, tg\,\beta \end{cases} *$$

(کاربردی) Note

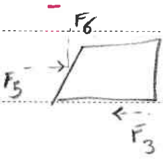
EX.

روش ۲) در مسائلی که تقارن داشت:

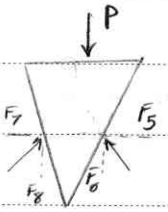


$$F_1 = F_2 = \frac{P}{2} + W$$

$$F_3 = F_4 = \mu\left(\frac{P}{2} + W\right)$$



از طرفی



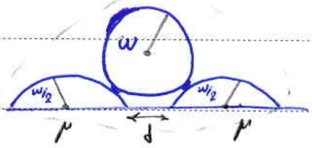
$$F_6 = F_8 = \frac{P}{2}$$

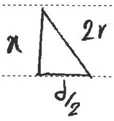
$$F_5 = F_7 = \frac{P}{2}\, tg(90-\alpha) = \frac{P}{2}\, cotg\,\alpha$$

$$F_5 = F_3 \longrightarrow \frac{P}{2}\, cotg\,\alpha = \mu\left(W + \frac{P}{2}\right) \longrightarrow P = \frac{2W\mu}{cotg\,\alpha - \mu}$$

EX حداکثر فاصله دو نیم استوانه چقدر باشد تا استوانه بالایی لیز نخورد.

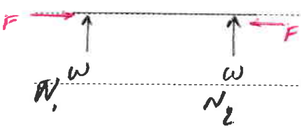
حل) چون این مسئله تقارن دارد ← از روش مسئله بالا حل می‌کنیم.





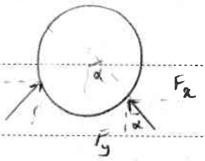
$$x = 4r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad , tg\,\alpha = \frac{d/2}{\sqrt{4r^2 - \frac{d^2}{4}}}$$

۱) ابتدا کل جسم را یک پیکر در نظر گرفته و نیروهای عمود سطح را بدست می‌آوریم.



$$N_1 = N_2 = W \quad و \quad F = \mu W$$

۲) رابطه بین نیروی وارده از استوانه کامل را بدست می‌آوریم.



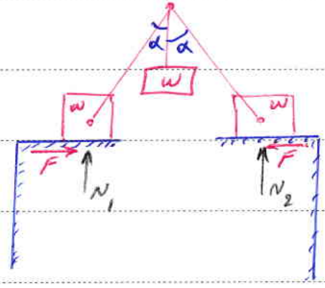
$$F_y = \frac{W}{2} \quad و \quad F_x = \frac{W}{2}\, tg\,\alpha$$

$$\Sigma F_x = \longrightarrow F_x = \mu W \longrightarrow \frac{W}{2} \times \frac{d/2}{\sqrt{4r^2 - \frac{d^2}{2}}} = \mu W \longrightarrow d\checkmark$$

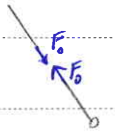
لحظه آستانه حرکت

09019916762

EX


α
α
w
w
w
F
F
N_1
N_2

$$N_1 = N_2 = \frac{3w}{2} \quad , \quad F = \mu \frac{3w}{2}$$

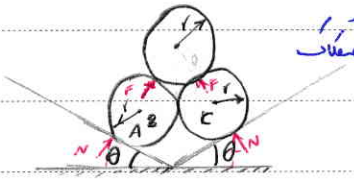


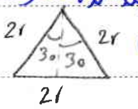
$$F_{oy} = \frac{w}{2} \quad , \quad F_{ox} = \frac{w}{2}\, tg\alpha$$

$$F_{ox} = F \Rightarrow \frac{w}{2}\, tg\alpha = \mu \frac{3w}{2} \longrightarrow \mu = \frac{1}{3}\, tg\alpha$$

ص 96 سوال 34

EX. سه استوانه همگن و مشابه مطابق شکل روی یکدیگر قرار گرفته اند، مقدار min زاویه‌ای که
سیستم در حال سکون می باشد. (قبل از جدا شدن استوانه‌های زیرین) سطوح بدون اصطکاک


r
r
r
F
F
A
B
C
N
N
θ
θ


2r
2r
2r
30
30

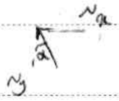
حل)

در هنگام جدا شدن استوانه‌های زیرین، دو استوانه A و C به یکدیگر نیروی وارد نمی‌کنند.

$$N_x = \frac{3w}{2}\, tg\alpha$$

$$N_y = \frac{3w}{2}$$

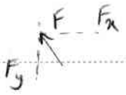
کل نورها یک پیلو

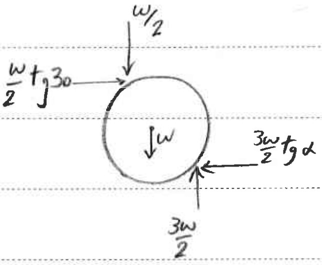


$$F_y = \frac{w}{2}$$

$$F_x = \frac{w}{2}\, tg\alpha$$

نیروی وارده از استوانه بالایی
به پایینی‌ها



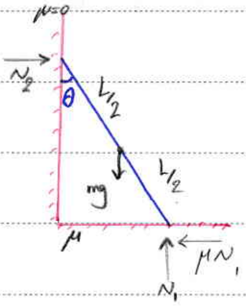

w/2
$\frac{w}{2} tg30$
w
$\frac{3w}{2} tg\alpha$
$\frac{3w}{2}$

$$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow \frac{w}{2}\, tg30 = \frac{3w}{2}\, tg\alpha \Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{3}\, tg30 \longrightarrow \alpha = 11^\circ$$

09019916762

جلسه هفتم

EX. حداکثر θ چقدر باشد تا میله در آستانه لیز خوردن قرار بگیرد.



حل) درحالت کلی (که یک جسم صلب بیشتر نداریم) $\Sigma F_x=0$ و $\Sigma F_y=0$ می نویسیم

به راحتی بدست آوردیم حول N_2 گشتاوری گیریم

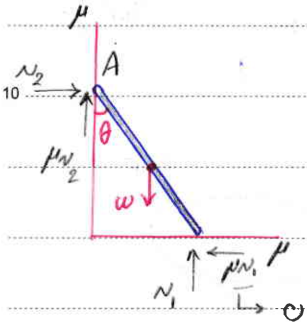
اگر N_2 〃 〃 حول N_1 〃 〃 〃 .

در این مثال $\Sigma F_y=0 \longrightarrow N_1=w$

حال حول N_2 گشتاور می گیریم.

$\Sigma F_y=0 \longrightarrow N_1=mg$ و $\Sigma M_A=0 \longrightarrow wL\sin\theta - wL\cos\theta - w\frac{L}{2}\sin\theta=0 \longrightarrow tg\theta=2\mu$

EX. حداکثر θ تا اینکه لیز نخورد.



چون در آستانه لیز خوردن است

$\Sigma F_x=0 \quad N_2=\mu N_1$

$\Sigma F_y=0 \quad N_1+\mu N_2=w$

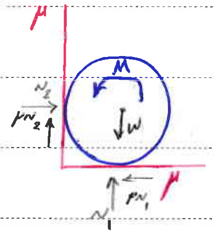
$\longrightarrow N_1+\mu^2 N_1=w \longrightarrow N_1=\frac{w}{1+\mu^2}$

حال نسبت به A گشتاور می گیریم.

$\Sigma M_A=0 \longrightarrow \frac{w}{1+\mu^2}L\cos\theta - \frac{\mu w}{1+\mu^2}L\sin\theta - w\frac{L}{2}\sin\theta=0 \longrightarrow tg\theta=\frac{2\mu}{1-\mu^2}$

EX. حداکثر M چقدر باشد تا لیز نخورد.

or M چقدر باشد تا در آستانه لیز خوردن قرار بگیرد.



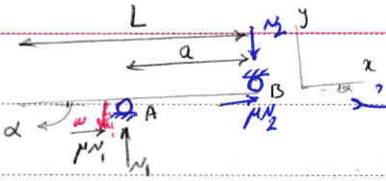
$\Sigma F_x=0 \Longrightarrow N_2=\mu N_1$

$\Sigma F_y=0 \Longrightarrow N_1+\mu N_2=w \longrightarrow N_1=\frac{\mu w}{1+\mu^2}$

$\Sigma M_0=0 \longrightarrow \frac{\mu w}{1+\mu^2}r+\frac{\mu^2 w}{1+\mu^2}r=M \longrightarrow \frac{\mu w}{1+\mu^2}r(1+\mu)=M$

که حول مرکز استوانه گشتاور می گیریم

EX. تیر سبک است، طول تیر را زیاد می کنیم، حداکثر طول تیر (L) چقدر باشد تا میله لیز نخورد.



$\Sigma F_x=0 \longrightarrow \mu N_1+\mu N_2=w\sin\alpha$

$\Sigma F_y=0 \longrightarrow N_1-N_2=w\cos\alpha$

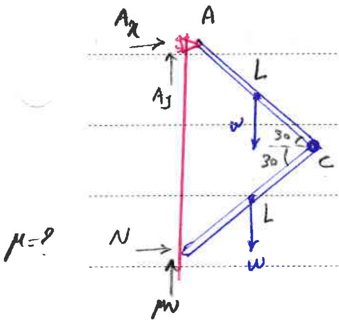
$\longrightarrow N_1=\frac{w}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\mu}+\cos\alpha\right)$

N_1 را حساب کردیم و دیگر نیاز به محاسبه ی N_2 نیست، حول B گشتاور می گیریم.

$\Sigma M_B=0 \longrightarrow N_1 a = w\frac{L}{2}\cos\alpha \Longrightarrow \frac{w}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\mu}+\cos\alpha\right)a=\frac{wL}{2}\cos\alpha \Longrightarrow a\left(\frac{tg\alpha}{\mu}+1\right)=L$

09019916762

EX. حداقل μ چقدر باشد تا میله لیز نخورد؟

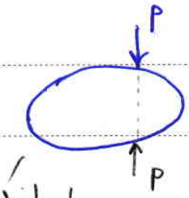

A_x
A
A_y
L
w
30
30
C
L
w
$\mu = ?$
N
μN

که چون در آستانه لیزخوردن است

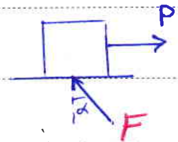
$\xrightarrow[\text{نوع اول}]{\text{تماس است}}$ $\Sigma M_A = 0 \longrightarrow$

$\Sigma M_C = 0 \longrightarrow$ $\mu N ✓$

یادآوری

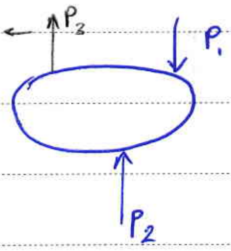


برای اینکه جسم در تعادل باشد. $\longleftarrow$ P

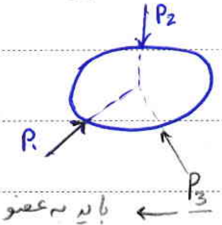


$Tg\alpha = \mu$

نیروی واقعی اصطکاک وارده به جسم $\longleftarrow$ F



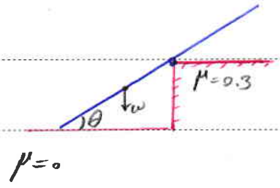
باید در راستای 2 نیروی موازی باشد تا جسم در تعادل قرار گیرد. $\longleftarrow$ P_3

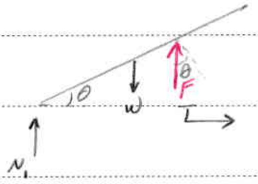


برای اینکه در تعادل باشد سه نیرو امتدادشان از یک نقطه بگذرد. $\longleftarrow$ باید به عضو 3 نیروی P_3

EX. حداقل θ چقدر باشد تا میله لیز نخورد.

L = طول میله

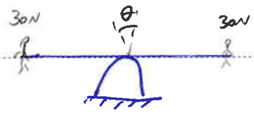

$\mu = 0.3$
w
θ
$\mu = 0$

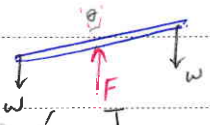

θ
F
θ
w
N_1

$\longrightarrow$ نیرو در واقع اصطکاک طبق نکته بالا

$\mu = tg\theta = 0.3 \longrightarrow \theta ✓$

EX. حداکثر θ چقدر باشد تا بچه ها لیز نخورند.

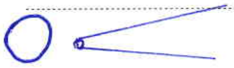

30N
θ
30N



که طبق نکته بالا

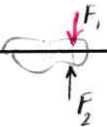
$\mu = tg\theta = 0.6 \longrightarrow \theta ✓$

EX. حداقل θ چقدر باشد تا بتوان حلقه را در داخل انبردست و حلقه سر نخورد.



حل: می دانیم که وقتی حلقه داخل انبر باشد 2 نیرو به حلقه وارد می شود

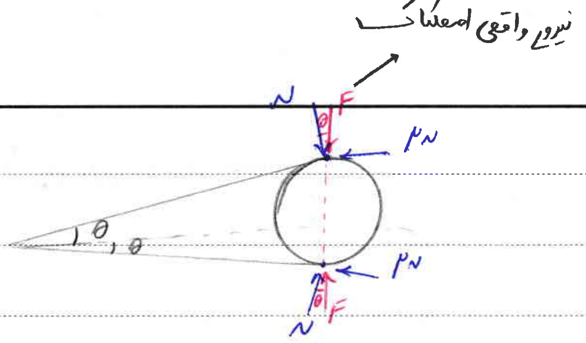
مانند نکته بالا



(برای تعادل)

09019916762

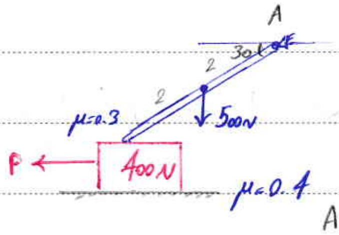
EX ادامه حل


نیروی واقعی اصطکاک
N
F
θ
μN
θ, θ
μN
θ
N
F

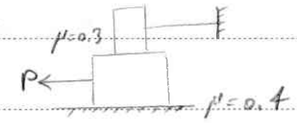
$\mu = \tan\theta = 0.4 \to \theta$ ✓

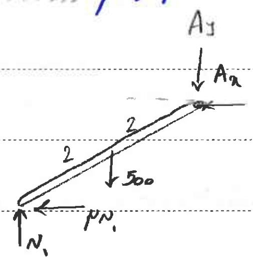
روش دوم) نوشتن $\sum F_y = 0$ و $\sum F_x = 0$ ← θ بدست می آید.

EX حداکثر P چقدر باشد تا جسم حرکت نکند؟


A
30°
2
2
500N
μ=0.3
P
400N
μ=0.4

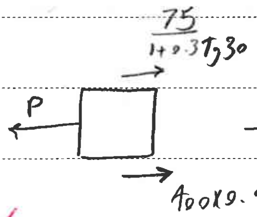
or




Ay
Ax
2
2
500
μN₁
N₁

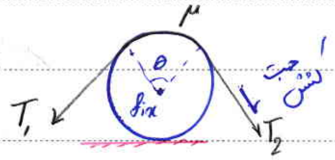
$\sum M_A = 0 \to N_1 \times \cos 30 \times 4 + \mu N_1 \sin 30 \times 4 = 500 \times \cos 30 \times 2 \to$

$N_1 = \frac{250}{1+0.3\tan 30}$, $f_1 = \mu N_1 = \frac{75}{1+0.3\tan 30}$


75/(1+0.3 tg30)
P
400×0.4

$\to \sum F_x = 0 \to P$ ✓

اصطکاک در کابل ها

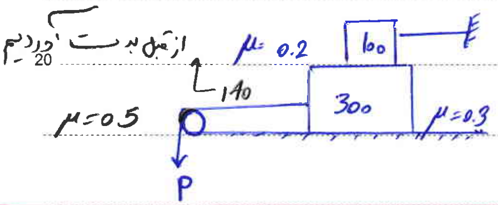

μ
θ
fix
T₁
T₂
در جهت کشش

$$\underbrace{T_2}_{\text{در جهت کشیدن}} = T_1 e^{\overset{\text{ضریب اصطکاک}}{\mu}\underbrace{\theta}_{\text{زاویه تماس کابل با قرقره}}}$$

$\theta \xrightarrow{EX} \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$

همواره نیرویی که در جهت کشش است T_2 است.

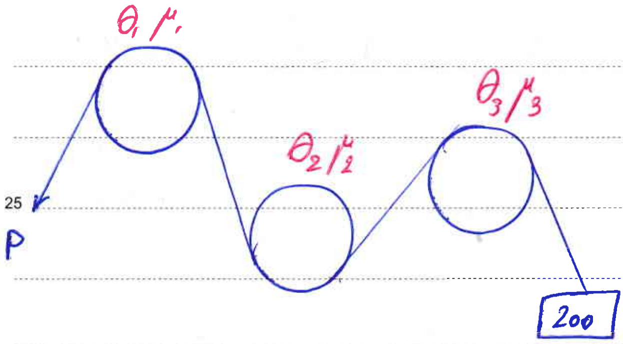
EX


از قبل بدست آوردیم
μ=0.2
100
140
300
μ=0.5
μ=0.3
P

$T_2 = T_1 e^{\mu\theta}$

$P = 140 e^{0.5\frac{\pi}{2}}$

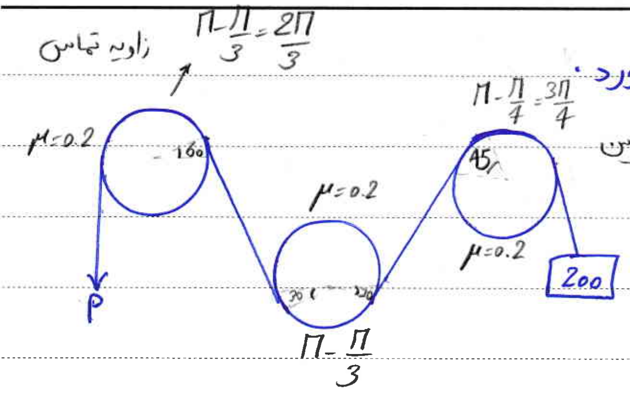
Note


θ₁ μ₁
θ₂ μ₂
θ₃ μ₃
P
200

$T_2 = T_1 e^{\sum \mu_i \theta_i}$

$EX \to P = 200 e^{\theta_1\mu_1 + \theta_2\mu_2 + \theta_3\mu_3}$

09019916762


زاویه تماس
$\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$
$\mu=0.2$
160
P
$\mu=0.2$
30
120
$\pi-\frac{\pi}{3}$
$\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$
45
$\mu=0.2$
200

EX حداکثر p چقدر باشد تا تعادل برهم نخورد.

که یعنی دست بکشیم ⟵ جهت حرکت به سمت پایین

$$T_2=T_1e^{0.2\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)} \Rightarrow P=200e^{0.2\left(\frac{25\pi}{12}\right)} \rightarrow P✓$$

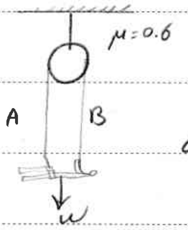
EX. حداقل p چقدر باشد تا تعادل برهم نخورد.

که یعنی دست شل تر ⟵ جهت حرکت به سمت بالا

$$200=Pe^{0.2\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{4}\right)} \Rightarrow 200=Pe^{0.2\left(\frac{25\pi}{12}\right)}$$

که تا جایی که تعادل بهم نخورد.

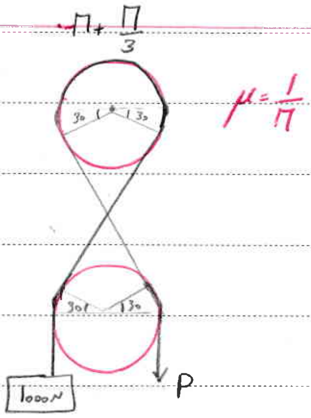
EX. بشکه دو خود را می خواهد بالا بکشد، چقدر نیرو باید نیرو وارد کند تا بالا رود.



$$T_B=T_Ae^{0.6(\pi)}$$

$$\Sigma F_y=0 \longrightarrow T_A+T_B=W$$

NOTE ⟵ اگر بشکه نورد می خواست پایین بیاید. $T_A=T_Be^{0.6\pi}$

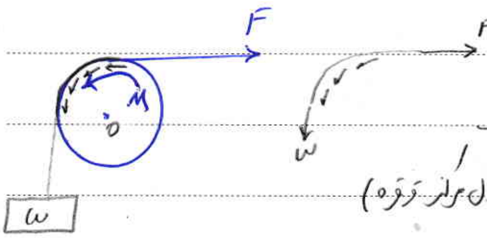

$\pi+\frac{\pi}{3}$
$\mu=\frac{1}{\pi}$
30
130
30
130
1000 N
P

EX. حداکثر p چقدر باشد تا از حرکت وزنه جلوگیری کند.

$$P=1000\times e^{\frac{1}{\pi}\left(\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=5290$$

⟵ گفته حداکثر

EX. M چقدر باشد تا جسم در آستانه حرکت باشد.



$$\longrightarrow F>W \longrightarrow F=T_2$$

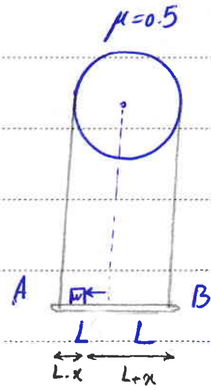
* راه حل بهتر: آن نیرویی که گشتاور هم جهت با ممان اعمال کند (حول مرکز قرقره)

آن نیروی T_1 است (کوچکتره)

$$\Sigma M_o=0 \longrightarrow Fr-Wr-M=0$$

$$F=We^{\mu\frac{\pi}{2}} \longrightarrow M✓$$

09019916762



سوال (مهم) EX حداکثر x چقدر باشد تا جسم در تعادل باشد. (بماند)

میله بدون وزن است و $\mu=0.5$

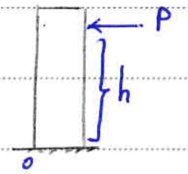
در این شکل کابل A نیروی بیشتری را تحمل می‌کند ← T_2

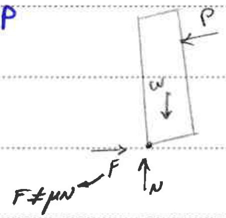
1) $T_2=T_1e^{0.5}$

2) $T_2(L-x)=T_1(L+x) \to \frac{1}{L-x}=\frac{e^{0.5\pi}}{L+x} \to x$ ✓ ← حول w گشتاور می‌گیریم

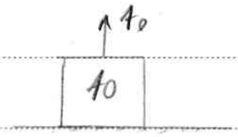
واژگونی:

اگر جسمی در حال واژگونی باشد، متعادل در یک نقطه به سطح زیرین آن وارد می‌شود. و حول آن نقطه شروع به دوران (چرخش) می‌کند.

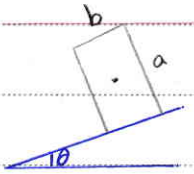




Note هنگامی که جسم در آستانه بلند شدن است، با زمین تماس دارد ولی $N=0$ است.

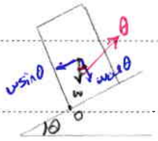


Note اگر بخواهیم در آستانه واژگونی لیز هم بخورد در آن صورت $F=\mu N$



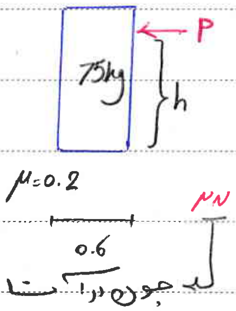
EX حداکثر زاویه چقدر باشد تا جسم واژگون نشود.

or حداقل زاویه چقدر باشد تا جسم در آستانه واژگونی قرار گیرد.

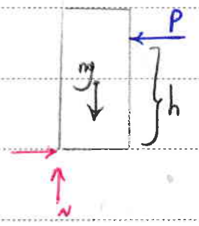


$$\Sigma M_0=0 \to w\sin\theta\,\frac{a}{2}-w\cos\theta\times\frac{b}{2}=0 \to tg\,\theta=\frac{b}{a}$$

92,81 EX در جسم مقابل حداکثر h چقدر باشد که (در آستانه) لیز خوردن باشد و واژگون نشود.



چون در آستانه لیز خوردن است

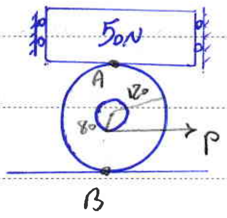


$\Sigma F_y=0 \to N=w$

$\Sigma F_x=0 \to \mu N=p \to p=0.2\times75=15$

$\Sigma M_0=0 \to p\times h-75\times0.3=h \Rightarrow h=\frac{75\times0.3}{0.2\times75}=\frac{3}{2}$

09019916762

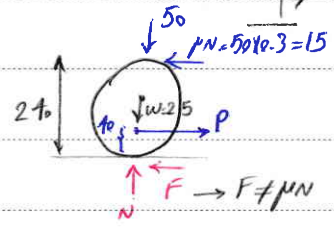

50N
A
120
80
P
B

$\mu_A = 0.3$
$\mu_B = 0.4$
وزن استوانه 25N

EX. حداکثر P چقدر باشد تا جسم از حالت تعادل خارج نشود. که استوانه حول

حل) در این سوال امکان دارد یکی از 2 نقطه (A, B) بلغزد و در دیگری بغلتد.

چون فرض کردیم می لغزد

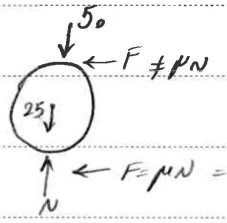

50
$\mu N = 50 \times 0.3 = 15$
240
W=25
40
f
P
F
N

ابتدا فرض می کنیم که فقط B می غلتد و A لیز می خورد.

$F \rightarrow F \neq \mu N$ چون می غلتد

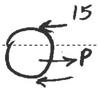
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = 75$, $\Sigma M_B = 0 \rightarrow 15 \times 240 - p \times 40 = 0 \rightarrow$

$p = 90N$

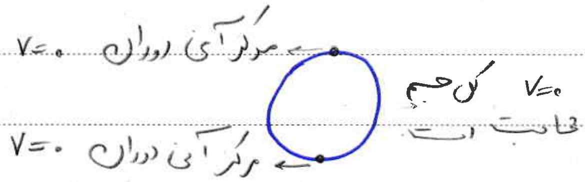

50
$F \neq \mu N$
25
$F = \mu N = 75 \times 0.4 = 30$
N

حال ممکن است که B بلغزد و A بغلتد.

$\Sigma M_A = 0 \rightarrow p \times 200 = 30 \times 240 = 36N$

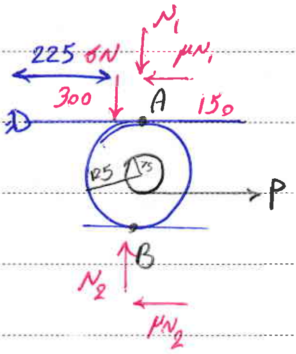
اگر هر دو هم بلغزند $\Sigma F_x = 0 \rightarrow p = 45 \leftarrow$  این شرط را چک نمی کنیم، چون بعید است هردو با هم 30 شروع به لغزش کنند.

جواب ما P_{min} است $\longrightarrow p = 36N$


V=0 مرکز آنی دوران
V=0 مرکز آنی دوران
کل جسم $V=0$
ثابت است

Note ← امکان ندارد که هردو بغلتند ←

EX. P چقدر زیاد است که در هر دو نقطه A و B می لغزد.
نسبت ضرایب اصطکاک $\frac{\mu_A}{\mu_B} = ?$


N_1
225
6N
μN_1
300
A
150
R5
75
P
B
N_2
μN_2

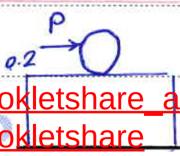
$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow N_1 300 = 6 \times 225 \longrightarrow N = 4.5N$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow N_2 = 20.5$

$\Sigma M_o = 0 \longrightarrow \mu_B N_2 \times 50 = \mu_A N_1 \times 200 \longrightarrow \frac{\mu_A}{\mu_B} = \frac{1}{4} \times \frac{N_2}{N_1} = ✓$

* اگر گفت هر دو می غلتد ← یعنی غلط است.

EX. در این سوال هر چقدر نیروی P اعمال کنیم، جسم از حالت تعادل خارج می شود.



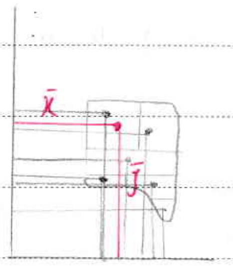
09019916762

Subject: ۱

Year. Month. Date. ( )

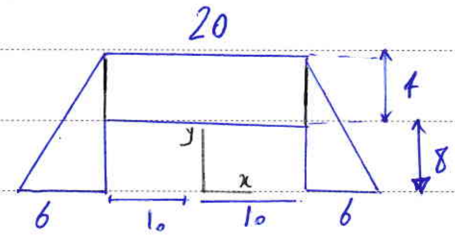
جلسه هشتم

مرکز سطح:



$$\left\{\begin{array}{l} * \ \bar{x} = \dfrac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} \\ * \ \bar{y} = \dfrac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} \end{array}\right.$$

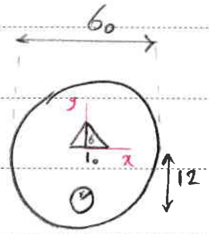
EX. مرکز سطح شکل مقابل چقدر است؟



حل) شکل را به 2 مثلث و یک مستطیل تبدیل می‌کنیم.

$$\bar{y} = \frac{2\times\frac{(12\times6)}{2}\times4 + 20\times4\times10}{2\times\frac{6\times12}{2} + 20\times4} = \frac{288+800}{72+80} = \frac{1088}{152} = 7.15$$

EX. r چقدر باشد تا مرکز سطح شکل مقابل روی مرکز دایره بزرگ بیافتد.



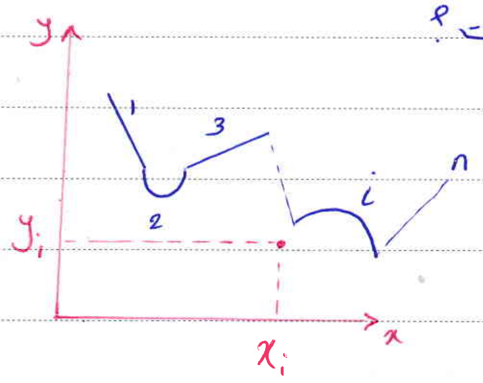
$\bar{y}=0$ یعنی

$$\bar{y} = \frac{\pi\times30^2\times0 + \left(-\frac{6\times10}{2}\times2\right) + (-\pi r^2)(-12)}{\pi\times30^2 - \frac{6\times10}{2} - \pi r^2} = 0 \Rightarrow$$

$$+60 = 12\pi r^2 \longrightarrow \sqrt{\frac{5}{\pi}} = r$$

■ مرکز ثقل

EX. مرکز ثقل شکل روبه‌رو (که به صورت خط یا منحنی) است، کجا است؟



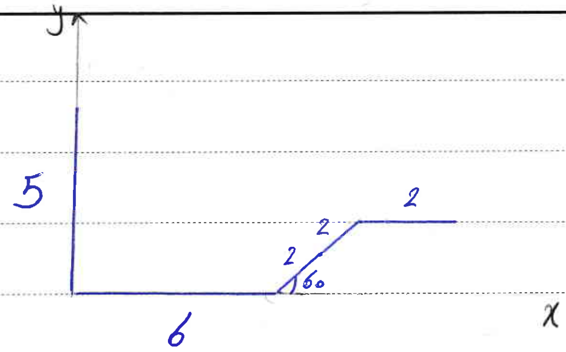
$$* \ \bar{x} = \frac{\Sigma L_i x_i}{\Sigma L_i} \xrightarrow[\text{باشند}]{\text{if وزن داشته}} \bar{x} = \frac{\Sigma \alpha_i L_i x_i}{\Sigma \alpha_i L_i}$$

$$* \ \bar{y} = \frac{\Sigma L_i y_i}{\Sigma L_i} \xrightarrow[\text{باشند}]{\text{if وزن داشته}} \bar{y} = \frac{\Sigma \alpha_i L_i y_i}{\Sigma \alpha_i L_i}$$

((از این قسمت تا به حال سوال داده نشده است))

09019916762

EX. مرکز ثقل شکل زیر کجاست؟

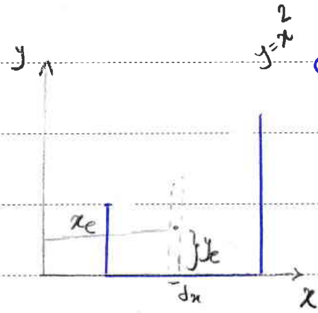


حل) ابتدا یک محور دلخواه انتخاب می کنیم.

$$\bar{x} = \frac{5\times 0 + 6\times 3 + 4\times(2\cos 60 + 6) + 2\times(7+4\cos 60)}{5+6+4+2} = \ldots$$

$$\bar{y} = \frac{5\times 2.5 + 6\times 0 + 4\times(2\sin 60) + 2\times(4\sin 60)}{5+6+4+2} = \ldots$$

بدست آوردن مرکز سطح در منحنی ها:



مختصات مرکز سطح المان

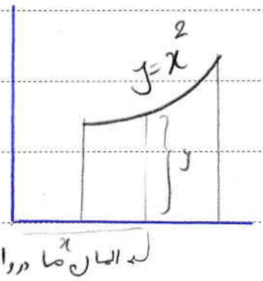
$$*\ \bar{x} = \frac{\int x_e\, dA}{\int dA}$$

$$*\ \bar{y} = \frac{\int y_e\, dA}{\int dA}$$

مختصات مرکز سطح المان

بهترین نوع المان عمودی است،
اگر المان افقی بزنیم، باید
۲ تا انتگرال بنویسیم.

EX

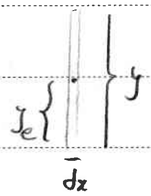


$$\begin{cases} x_e = x \\ y_e = \dfrac{y}{2} \\ dA = y\,dx \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_1^3 x\cdot y\, dx}{\int_1^3 y\, dx} = \frac{\int_1^3 x^3\, dx}{\int_1^3 x^2\, dx}$$

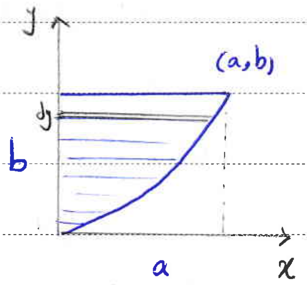
المان ما در واقعیت زیرا
dx، یک میلیاردیم ل است.
خیلی کوچک است و دیده نمی شود
ولی وجود دارد.

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{y}{2}\, y\, dx}{\int_1^3 y\, dx} = \frac{\frac{1}{2}\int_1^3 x^4\, dx}{\int_1^3 x^2\, dx}$$



09019916762

EX مرکز سطح شکل مقابل (سطح مقابل) چقدر است؟ ($\bar{y}$)



$y=\frac{b}{an}x^{n}$

حل) باید المان گرفت، بهترین نوع المان افقی است زیرا $x_e=\frac{x}{2}$ و $y_e=y$

$x=(\frac{an}{b})^{1/n}y^{1/n}$

$$\begin{cases} x_e=\frac{x}{2} \\ y_e=y \\ dA=x\,dy \end{cases} \xrightarrow[\text{می شود}]{\text{فرمول عوض}} \qquad \bar{x}=\frac{\int x_e\,dA}{\int dA} \qquad \bar{y}=\frac{\int y_e\,dA}{\int dA}$$

$$\longrightarrow \bar{y}=\frac{\int_0^b y\times(\frac{an}{b})^{1/n}y^{1/n}\,dy}{(\frac{an}{b})^{1/n}\int_0^b y^{1/n}\,dy}=\frac{\int_0^b y^{\frac{n+1}{n}}\,dy}{\int_0^b y^{1/n}\,dy}$$

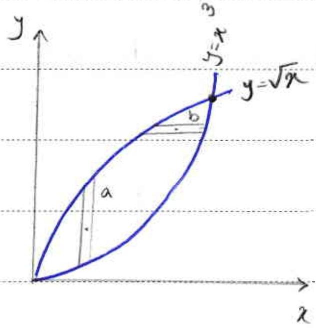
* اگر بخواهیم بدون المان حل کنیم ⟵

* $$\bar{x}=\frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}$$

* $$\bar{y}=\frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}$$

در مثال زیر بهتر است که از روش روبه رو (المان $\overset{dx}{\square}dy$ حل شود)

EX مرکز سطح محصور بین $y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$ را بدست آورید.



حل) ۲ جور المان می توان گرفت المان a و b

برای المان a
$$\begin{cases} x_e=x \\ y_e=\frac{x^3+\sqrt{x}}{2} \\ dA=x\,dy \end{cases} \longrightarrow \bar{x}=\frac{\int x\,dA}{\int dA} \checkmark$$

برای المان b
$$\begin{cases} x_e=\frac{y^2+\sqrt[3]{y}}{2} \\ y_e=y \\ dA=y\,dx \end{cases}$$

حال از راه المان $\overset{dx}{\square}dy$

نقطه برخورد (۱,۱)

$$\bar{x}=\frac{\iint x\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}=\frac{\int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}}x\,dx\,dy}{\int_0^1\int_{x^3}^{\sqrt{x}}dx\,dy}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint y\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}$$

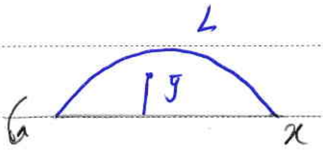
* در مثال بالا بهتر است که از روش روبه رو حل شود

09019916762

* مثال ۶ کتاب ص 242 حل شود.

قضیه پاپوس

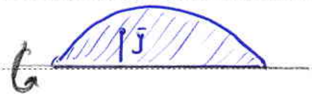
قضیه اول: سطح حادث از دوران یک منحنی حول یک محور برابر است با حاصلضرب طول منحنی در مسافتی که مرکز ثقل بر اثر دوران طی می‌کند.



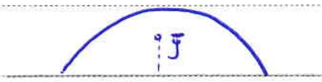
$$S = 2\pi\bar{y}L$$

قضیه دوم: حجم حادث از دوران کامل یک صفحه حول یک محور برابر است با حاصلضرب مساحت صفحه در مسافتی که مرکز ثقل صفحه بر اثر دوران طی می‌کند.

$$V = 2\pi\bar{y}A$$



EX اگر یک حلقه را دوران دهیم، $\bar{y}$ = ?

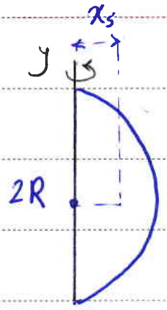


سطح حامل یک کره $S_{\text{کره}} = 4\pi R^2$

طبق قضیه پاپوس $S = 2\pi\bar{y}L \rightarrow 4\pi R^2 = 2\pi \times \bar{y} \times \underbrace{\pi R}_{L} \longrightarrow {}^{*}\bar{y} = \frac{2R}{\pi}$

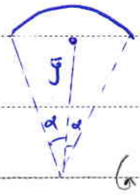
* $\bar{y}$ نیم حلقه و ربع حلقه $\frac{2R}{\pi}$.

EX $x_s = ?$



$$x_s = \frac{2(2R)}{\pi} = \frac{4R}{\pi}$$

EX مرکز سطح شکل مقابل ($\bar{y}$) چقدر است؟



Note ** ← مساحت شکل روبه رو پس از دوران حول محور $S = 4\pi R^2 \sin\alpha$

مساحت کره کامل × $\sin\alpha$

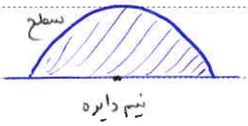
(پس از دوران قسمتی از کره می‌شود.)

$$\underbrace{4\pi R^2 \sin\alpha}_{S} = 2\pi\bar{y} \times \underbrace{R(2\alpha)}_{L} \longrightarrow {}^{*}\bar{y} = \frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

09019916762

صورت سوال نمی نویم

EX در نیم دایره روبه رو (را حول محور دوران می دهیم) $\bar{y}$ را بدست آورید.

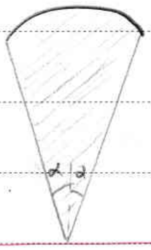


$$V=2\pi\bar{y}A$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3=2\pi\bar{y}\times\frac{\pi R^2}{2}\longrightarrow\bar{y}=\frac{4R}{3\pi}$$

پس از دوران کره توپری سازد

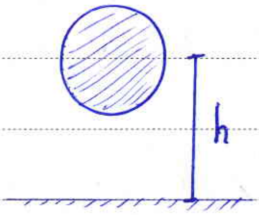
Note **



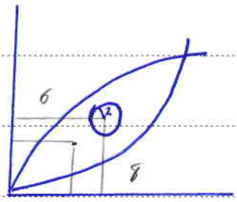
$$V=\underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{\text{حجم کره}}\underbrace{\sin\alpha}_{\sin\alpha}$$

EX. حجم حاصل از دوران شکل زیر چه می شود؟

شکل حاصل مانند تیوب ماشین می شود.



$$V=2\pi\times h\times\pi r^2\Rightarrow 2\pi^2r^2h$$



EX. $\bar{x}$ و $\bar{y}$ شکل روبه رو را بدست آورید؟

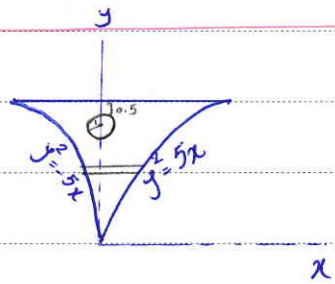
حل: در منحنی ها ما به جای اینکه $\bar{y}$ و $\bar{x}$ را بدست آوریم و سپس در فرمول $\bar{y}=\frac{\Sigma A_iy_i}{\Sigma A_i}$ و $\bar{x}=\frac{\Sigma A_ix_i}{\Sigma A_i}$ قرار دهیم،

ابتدا فرض می کنیم که دایره بیرون نیامده و سپس

$$\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{\int dA}=\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{A}\Rightarrow A\bar{y}=\int y\,dA$$

$$\xrightarrow[\text{سپس}]{}\quad\bar{y}=\frac{\int y\,dA-A\times\bar{y}}{\int dA-\pi r^2}$$

Note ← **



EX. به فاصله 0.5 از بالا در شکل روبه رو یک دایره به شعاع 1 در می آوریم.

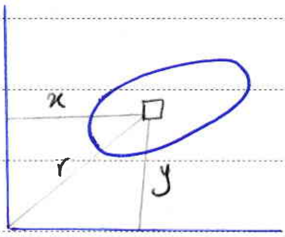
$\bar{y}=?$

المان
$$\begin{cases}x_e=\frac{y^2}{5}\\ y_e=y\\ dA=\frac{2y^2}{5}dy\end{cases}$$

$$\bar{y}=\frac{\int y\times\frac{2y^2}{5}dy+(-\pi\times1)(3.5)}{\int_0^5\frac{2y^2}{5}dy-\pi\times1^2}=\checkmark$$

09019916762

ممان اینرسی



$$^{*}\; I_x = \int_A y^2 dA$$

$$^{*}\; I_y = \int_A x^2 dA$$

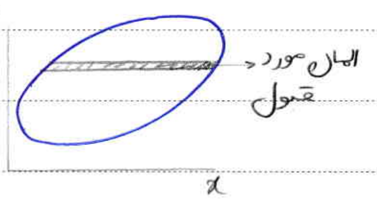
$$^{*}\; I_{xy} = \int xy\, dA$$

اگر جسم دارای تقارن باشد I_{xy} حول آن محور تقارن و هر خط عمود بر محور تقارن = ۰ است.

$$^{*}\; J_o \text{ or } I_o = \int r^2 dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA = I_x + I_y$$

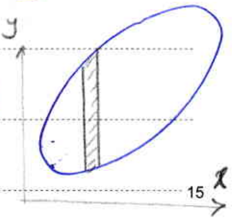
note برای بدست آوردن I_x، اگر المان را می‌خواهیم به صورت مستطیلی بگیریم، المان باید طوری باشد که موازی ممان اینرسی حول محور مورد نظر باشد.

EX $I_x = \int y^2 dA$

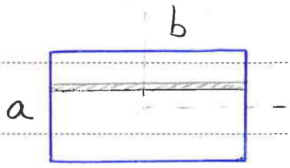


که باید المان طوری باشد که y ها در تمام نقاط برابر باشد

$I_y = \int x^2 dA$



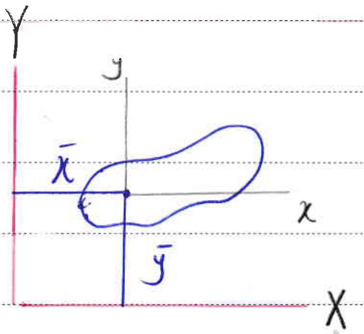
EX $I_x = ?$



$$I_x = \int y^2 dA = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} y^2\, b\,dy = \frac{1}{12} a^3 b$$

باید حقعل باشیم ←

قضیه انتقال محورهای موازی

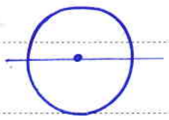


$$I_X = I_x + A y^2$$

$$I_Y = I_y + A x^2$$

$$I_{XY} = I_{xy} + A x y$$

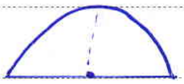
09019916762



$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$

$I_o = \frac{1}{2}\pi r^4$

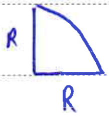
نیم دایره



$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$

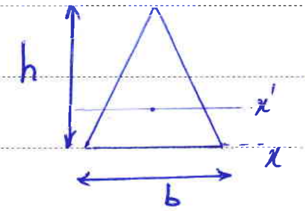
$J_o = \frac{1}{4}\pi r^4$

ربع دایره



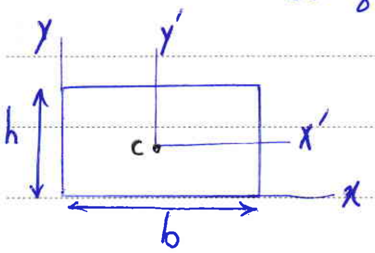
$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi R^4$

$J_o = \frac{1}{8}\pi R^4$



$I_{x'} = \frac{1}{36}h^3 b$

$I_x = \frac{1}{12}bh^3$

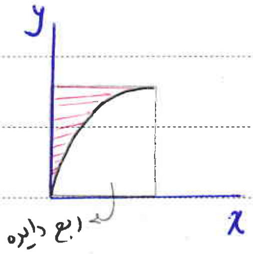


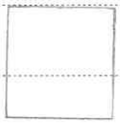
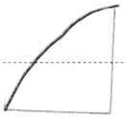
$\begin{cases} I_x = \frac{1}{12}bh^3 \\ I_y = \frac{1}{12}b^3h \end{cases}$

$\begin{cases} I_x = \frac{1}{3}bh^3 \\ I_y = \frac{1}{3}b^3h \end{cases}$

و $J_c = \frac{1}{12}bh(b^2+h^2)$

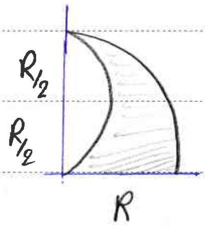
EX ممان اینرسی قسمت هاشورخورده چقدر است.

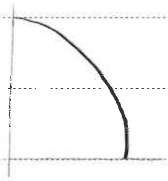
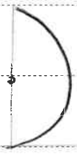


$=$  $-$ 

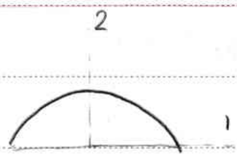
$\frac{1}{3}R^4 - \frac{1}{16}\pi R^4 = R^4\left(\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}\right)$

EX I_x قسمت هاشورخورده ؟



$=$  (1) $-$  (2)

$I_1 = \frac{1}{16}\pi R^4 - \left(\frac{1}{8}\pi R^4 + \frac{R}{2}\left(\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\right)\times\frac{1}{2}\right)$



$I_1 = \frac{1}{8}\pi R^4$

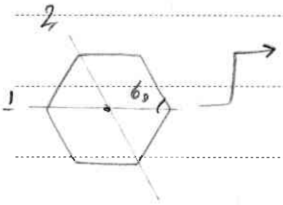
$I_2 = \frac{1}{8}\pi R^4 \leftarrow$ حول هر قطر

Note

09019916762

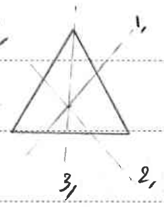
در چند ضلعی منتظم

* هر خط دلخواهی که از مرکز بگذرد و I آن یکسان می شود.



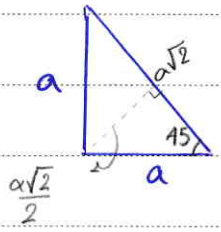
EX $\xrightarrow{\text{حول محور 1}}$ $800\ cm^4$ $\xrightarrow{\text{طبق نکته بالا}}$ $I_2 = 800\ cm^4$

3 ضلعی منتظم



$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{36} h^3 a$$

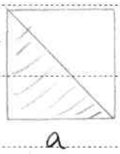
Note



$$I = \frac{1}{12}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3 (a\sqrt{2}) = \frac{1}{24} a^4$$

حول ارتفاع

or

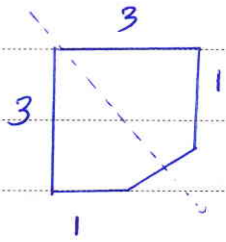


$I_{\text{نصف مربع}} = \frac{1}{24} a^4$

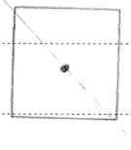
Note

مربع حول هر قطرش ← $I = \frac{1}{24} a^4$ (حول هر قطعه‌ای که از مرکز مربع بگذرد)

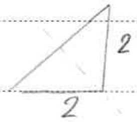
EX I شکل روبه رو حول محور مورد نظر؟



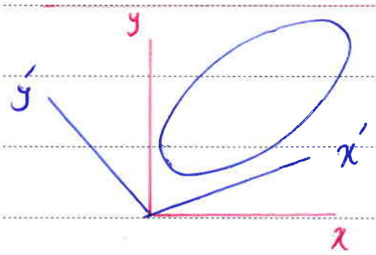
$=$



$-$



$$= \frac{1}{12}(3)^4 - \frac{1}{24}(2)^4 = \frac{1}{24} a^4$$



حول xy حساب کردیم I_x✓ I_y✓ I_{xy}✓

* $I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$

* $I_{y'} = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$

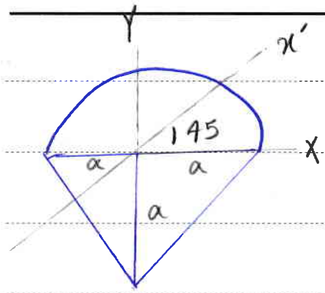
* $I_{x'y'} = + \dfrac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$

θ: زاویه بین محور x و x' است. از محور x به سمت x' حرکت می کنیم اگر پادساعتگرد شد $\theta > 0$

" " " " " اگر ساعتگرد شد ← $\theta < 0$

09019916762

EX. $I_{x'}=?$



$\theta=+45$

$$I_{x'}=I_x\cos^2\theta+I_y\sin^2\theta-\cancel{I_{xy}}\sin 2\theta$$

$\downarrow$ 0

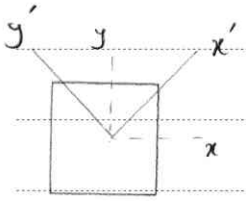
به علت داشتن تقارن

$$I_{x'}=I_x\times\frac{1}{2}+I_y\times\frac{1}{2}=\frac{I_x+I_y}{2}$$

اگر در مقطعی یک محور تقارن داشتیم، I_{xy} حول محور آن تقارن و هر محور عمود بر آن 0 است

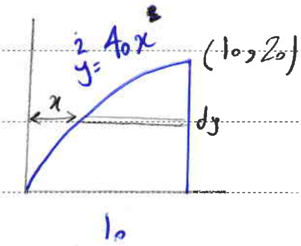
---

91 EX. $I_x=I_y=k$ ، $I_{x'},I_{y'}=?$



حل) طبق نکات مبحث قبل، مربع اگر چند ضلعی منتظم است و هر خطی که از
مرکز بگذرد I اش برابر است. $I_{x'}=I_{y'}=I_x=I_y=k$

EX. ممان اینرسی صفحه حول محور x چقدر است؟

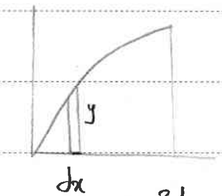


حل) باید المان موازی محور x باشد.

$$I_x=\int y^2\,dA \quad dA \to x\,dy$$

$$I_x=\int_0^{20} y^2\times(10-x)\,dy=\int_0^{20} y^2\left(10-\frac{y^2}{40}\right)dy$$

اگر المان را عمودی بگیریم

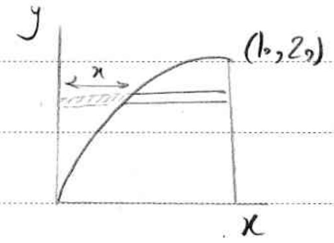


برای مستطیل $\longrightarrow \frac{1}{3}y^3dx$

$$\xrightarrow{\text{کل المان ها}}\int_0^{10}\frac{1}{3}y^3dx \Rightarrow \int_0^{10}\frac{1}{3}\left(\sqrt{40}\right)^3dx$$

المان بزرگ $=\frac{1}{3}(10)^3dy$, المان کوچک $\frac{1}{3}x^3dy$

برای شکل بالا I_y؟

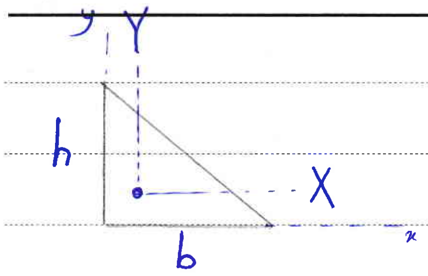


$$I_y=\int_0^{20}\frac{1}{3}\times10^3\times dy-\frac{1}{3}x^3dy$$

اگر المان را عمودی بگیریم ←

$$I_y=\int x^2y\,dx=\int_0^{10}x^2\sqrt{40x}\,dx$$

09019916762
PAPCO

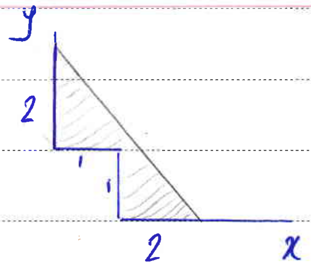


Note

$$I_{XY} = -\frac{1}{72} h^2 b^2$$

$I_{xy} =$ باید از قضیه محورهای موازی رفت

EX



$$I_x = I_{\Delta} - I_{\square} = \frac{1}{12}(3)^3(3) - \frac{1}{3}(1)^4 = \frac{1}{4}3^3 - \frac{1}{3}$$

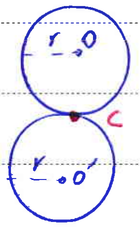
شعاع ژیراسیون

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \;,\; r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \;,\; r_o = \sqrt{\frac{I_o}{A}}$$

J حول محور x

J حول مبدأ (قطبی)

EX. شعاع ژیراسیون حول نقطه c ؟



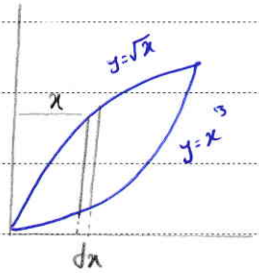
J حول $o = \frac{1}{2}\pi r^4$

$$J_c = \frac{1}{2}\pi r^4 + \pi r^2 (r)^2 = \frac{3}{2}\pi r^4$$

J_c کل $= 3\pi r^4$

$$r_c = \sqrt{\frac{J_c}{A}} = \sqrt{\frac{3\pi r^4}{2\pi r^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, r$$

EX. $I_x = ?$



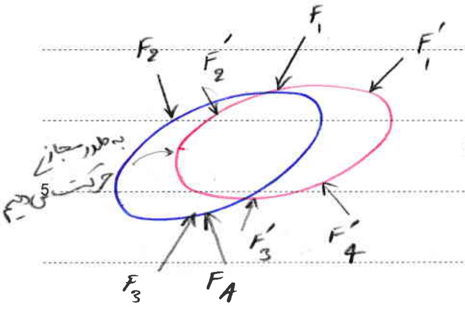
$$\frac{1}{3} y^3 dx \longrightarrow I_x = \int_0^1 y_2^3 dx - \int_0^1 y_1^3 dx$$

$$I_x = \int_0^1 (\sqrt{x})^3 dx - \int_0^1 (x^3)^3 dx$$

09019916762

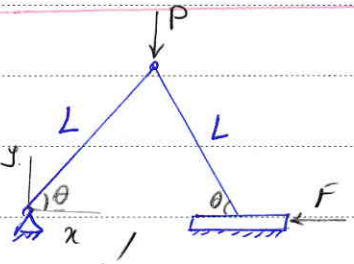
کار مجازی

معمل
که اگر بلد نبودیم از تعادل می‌رویم، اغلب مسائل از 2% و 3 حل می‌شود.



$$\xrightarrow[\text{المان ها کار انجام می‌دهند}]{\text{با حرکت مجازی}} \xrightarrow{\text{مجموع کارها:}} W_{tot}=0$$

EX. چه نیروی F ای بگذاریم که تعادل برقرار شود؟



حل از طریق کار مجازی.

می‌گوییم که جسم حرکت کند، می‌بینیم که دو نیروی F و P کار انجام می‌دهند (نیروهای فعال)، آنجایی که ثابت است را یک محور x,y set می‌کنیم مختصات تفاضل فعال را می‌نویسیم. می‌دانیم که نیروی P در جهت y و نیروی F در جهت x است. و اگر کار انجام دهند در این مسیر است.

$$y_p = L\sin\theta \xrightarrow[\text{می‌دهیم}]{\text{یک مقدار مجازی حرکت}} \delta y_p = L\cos\theta\, d\theta$$

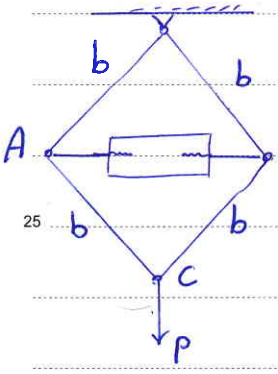
که واقعی dy
مجازی δy

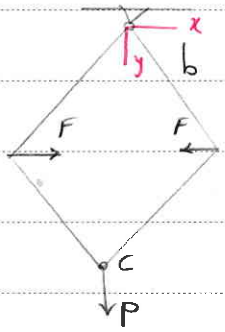
$$x_F = 2L\cos\theta \longrightarrow \delta x_F = -2L\sin\theta\, d\theta$$

حل P در جهت $-y$ ← $-P$ و F در جهت $-x$ ← $-F$ را در تغییر مکانشان ضرب (کار) و سپس = 0 قرار می‌دهیم

$$-p(L\cos\theta\,\delta\theta) - F(-2FL\sin\theta\,\delta\theta) = 0 \longrightarrow F = \frac{P}{2}\cot g\theta$$

EX. نیروی P را اعمال می‌کنیم، نیرویی که به جک‌ها وارد می‌شود چقدر است؟





حل) نیروهای فعال ۲ نیروی F
و نیروی P

$$y_c = 2b\sin\theta \longrightarrow \delta y_c = 2b\cos\theta \xrightarrow{\text{P در جهت +}} p(2b\cos\theta)$$

$$x_B = b\cos\theta \longrightarrow \delta x_B = -b\sin\theta\,\delta\theta \xrightarrow{\text{F در جهت -}} -F(-b\sin\theta\,\delta\theta)$$

$$x_A = -b\cos\theta \longrightarrow \delta x_A = +b\sin\theta\,\delta\theta \xrightarrow{\text{F در جهت +}} F(b\sin\theta\,\delta\theta)$$

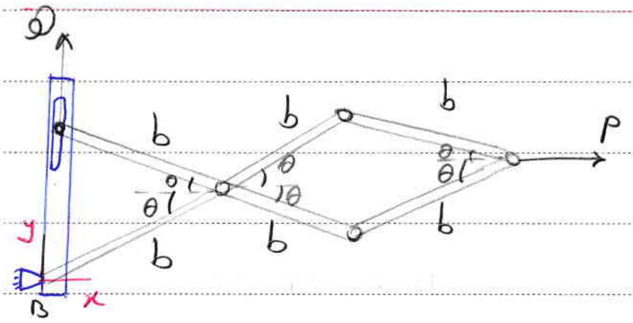
$$\delta W_{tot} = 0$$

$$F = p\cot g\theta$$

09019916762

در امتحان:

در امتحان مختصات نیروهای فعال را حساب کرده و در ذهن خود مشتق گرفته و در نیروی فعال خود (بسته به جهتش + یا -) ضرب می کنیم و مجموع را مساوی صفر قرار می دهیم.



EX. برای اینکه سیستم روبه رو در حال تعادل باشد، نیروی Q چقدر است؟

حل)

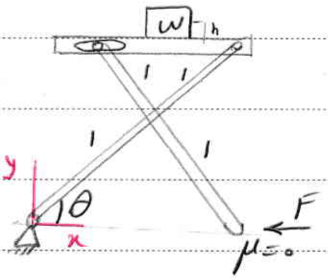
نیروهای فعال Q,P هستند.

در B که fix است، L_x^y را set می کنیم.

$3b\cos\theta \longrightarrow -3b\sin\theta \xrightarrow{+P} -3Pb\sin\theta$

$2b\sin\theta \longrightarrow 2b\cos\theta \xrightarrow{+Q} Q(2b\cos\theta)$

$\xrightarrow{\text{مجموع}=0} Q=\frac{3}{2}P\,tg\theta$



EX → $\theta=60$

EX. نیروی F چقدر باشد تا sys زیر در تعادل باشد؟

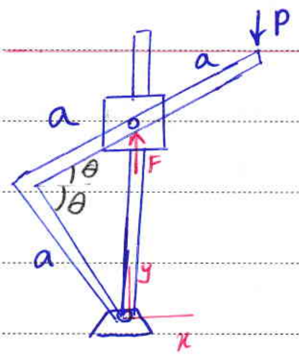
حل) حال w را نگفته، از راه تعادل بسیار سخت می شود. چون باید فاصله w را a,b بداریم و بیرار کلی محاسبات در آخر a,b حذف می شوند. ما از راه کار مجازی حل می کنیم.

نیروی فعال F و w

$2\sin\theta+h \longrightarrow 2\cos\theta \xrightarrow{-\text{در جهت}\ w} -2w\cos\theta$

$2\cos\theta \longrightarrow -2\sin\theta \xrightarrow{-\text{در جهت}\ F} 2F\sin\theta$

$\xrightarrow{\text{مجموع}=0} F=w\cot g\theta$



EX. نیروی F چقدر باشد که sys روبه رو در تعادل باشد؟

حل)

نیروهای فعال F و P هستند.

$Y_F=2a\sin\theta \xrightarrow{\text{مشتق}} 2a\cos\theta \xrightarrow{+\text{در جهت}\ F} 2Fa\cos\theta$

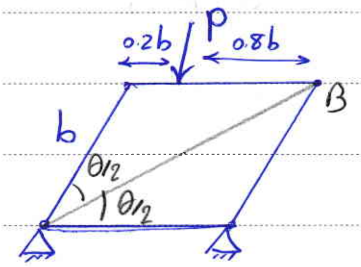
$Y_P=3a\sin\theta \longrightarrow 3a\cos\theta \xrightarrow{-x\ \text{در جهت}\ P} -3aP\cos\theta$

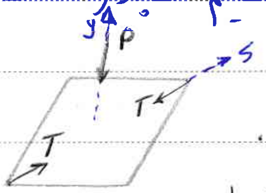
$\xrightarrow{\text{مجموع}=0} F=\frac{3}{2}P$

در جواب آخر θ حذف شده است ← یعنی در هر زاویه ای sys در حالت تعادل است. ← کاربرد ← چراغ دندان پزشکی

09019916762

EX. در سیستم روبه رو برای تعادل سیم وصل می کنیم که در اثر نیروی P پایین نیاید ← نیروی داخل سیم چقدر است.





حل) در اینجا ما 2 نیروی فعال T و P را داریم.

اگر T بخواهد کار انجام دهد، در راستای S است

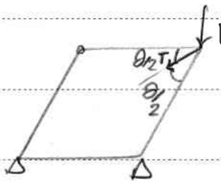
$y_P = l\sin\theta \longrightarrow \delta y_P = L\cos\theta\,\delta\theta$

از قانون کسها $\longrightarrow S_T = 2b\cos\frac{\theta}{2} \longrightarrow \delta S_T = -b\sin\theta/2$

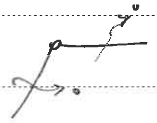
$-p(L\cos\theta\,\delta\theta) - T(-b\sin\frac{\theta}{2}\,\delta\theta) = 0 \longrightarrow T = \frac{p\cos\theta}{\sin\theta/2}$

از راه تعادل ←

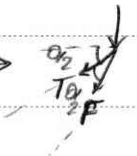
از کار مجازی می فهمیم که محل نیروی P فرقی نمی کند که در کجای ضلع ▱ باشد، پس نیروی P را روی مفصل B می بریم.



طبق نکته خرپا →

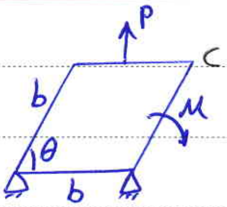


→



$\longrightarrow T = \frac{\sin(90-\theta)}{\sin\frac{\theta}{2}} P = \frac{p\cos\theta}{\sin\theta/2}$

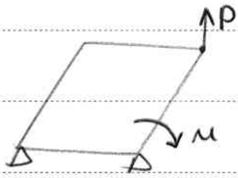
EX. M چقدر باشد تا تعادل برقرار باشد،



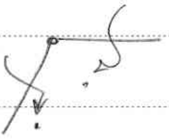
حل) از راه تعادل بسیار سخت است

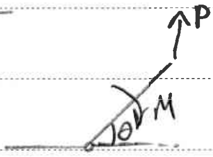
حل) از راه کار مجازی

از راه کار مجازی فرقی نمی کند که P کجا باشد ← P را به مفصل C می بریم.



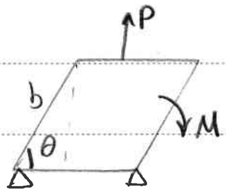
طبق نکته →





$\Sigma M_o = 0 \Rightarrow pb\cos\theta = M$

$\cos\theta = \frac{M}{pb}$



از راه کار مجازی

$y_p = -b\sin\theta \longrightarrow \delta y_p = -b\cos\theta\,\delta\theta$

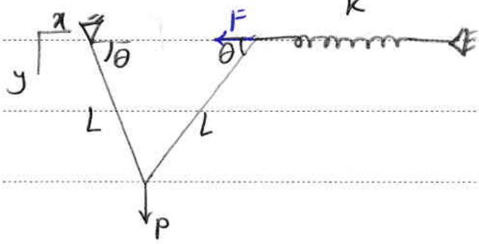
$\theta_M = \theta \longrightarrow \delta\theta_M = \delta\theta$

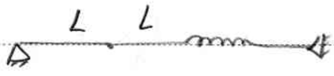
$pb\cos\theta\,\delta\theta - \underbrace{M\delta\theta} \longrightarrow \cos\theta = \frac{M}{pb}$

درخلاف جهت θ

09019916762

EX. نیروی p چقدر است؟ ابتدا θ صفر درجه بوده است.





$$\delta = 2L - 2L\cos\theta = 2L(1-\cos\theta)$$

$$F = k\delta \Rightarrow F = 2kL(1-\cos\theta)$$

$$p(L\cos\theta) + (-2L\sin\theta)\times 2kL(1-\cos\theta) = 0 \longrightarrow p = \frac{4kL\sin\theta - 4kL\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$p = 4kL(tg\theta - \sin\theta)$$

کلیه حقوق چاپ و نشر این جزوه متعلق به نویسنده این جزوه
است و هرگونه کپی برداری یا چاپ این جزوه بدون اجازه
نویسنده ممنوع و شرعاً حرام است، برای ارتباط
با نویسنده جزوه و بیان کردن انتقادات و
پیشنهادات و فروش جزوات دست‌نویس
خود در سایت ها با آدرس های زیر
در تماس باشید.

Bookletshare.sellfile.ir
Bookletshare@gmail.com
@Bookletshare (Telegram)

با تشکر

09019916762

برای دریافت و خرید جزوه‌های کنکوری زیر به سایت (http://bookletshare.sellfile.ir) مراجعه نمایید.

- ریاضی ۱و۲ (استاد آقاسی)
- معادلات (استاد آقاسی)
- استاتیک (استاد نائی)
- مقاومت مصالح (استاد نائی)
- طراحی اجزا (استاد شریعت‌پناهی)
- دینامیک سیالات (استاد صادقی)
- ترمودینامیک (استاد کوثری)
- انتقال حرارت (استاد کوثری)
- کنترل (استاد حامدی)

ضمنا جزوات HVAC 1,2,3 و همچنین جزوات جانمایی، متریال و آموزش ویدیویی سزار در این سایت برای فارغ التحصیلان موجود است.

موفق باشید